

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

36. Band, Heft 7/9

1. März 1951

S. 289—432

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Mitrinovitsh, D. S.: Sur un déterminant du type d'Escherich. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat., Annuaire 2, 135—139, russ. Zusammenfassg. 140 und franz. Zusammenfassg. 140 (1949) [Serbisch].

On considère le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} a^n & -a^{n-1}b & a^{n-2}b^2 & -a^{n-3}b^3 & \dots & (-1)^{n-1}ab^{n-1} & (-1)^n b^n \\ n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Les exposants des puissances ayant la base  $b$  se trouvent respectivement sur la diagonale principale de ce déterminant. Les exposants des puissances ayant la base  $a$  se trouvent respectivement sur la ligne parallèle à la diagonale principale. — Un calcul simple montre que la valeur de ce déterminant, rentrant dans le type d'Escherich, est donnée par la formule  $n!(a+b)^n$ . Autoreferat.

Snapper, Ernst: Polynomial matrices in one variable, differential equations and module theory. Amer. J. Math. 69, 299—326 (1947).

$P$  sei ein kommutativer Körper und  $P[x]$  der Polynomring in einer Veränderlichen über  $P$ . Verf. betrachtet im ersten Teil der Arbeit (rechteckige) Matrizen mit Elementen aus  $P[x]$  und entwickelt die Theorie der Norm  $\Delta$  und des höchsten Elementarteilers  $\varepsilon$  einer solchen Matrix. Abweichend von der klassischen Determinantendefinition führt Verf.  $\Delta$  und  $\varepsilon$  nur mit Hilfe des Spaltenmoduls der betreffenden Matrix ein; ein Weg, der dem invarianten Charakter dieser Größen in vollem Maße gerecht wird. Von dem Skalarbereich  $P[x]$  wird dabei in den wesentlichen Punkten nur benutzt, daß er ein Hauptidealring ist. Anschließend werden die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme über  $P[x]$  und auf die Systeme linearer, homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angewandt. Bei der letzten Anwendung beschränkt sich Verf. auf den Fall, daß  $P$  der Körper aller komplexen Zahlen ist. Diese Beschränkung entspringt jedoch lediglich praktischen Gesichtspunkten und ist keineswegs erforderlich. — Im zweiten Teil der Arbeit zeigt Verf., wie sich die Ergebnisse des ersten Teiles ausdehnen lassen auf den Fall, daß an Stelle von  $P[x]$  ein Ring  $\mathfrak{s}$  tritt, der die Maximalbedingung erfüllt. Die Untersuchungen werden durch eine Zusammenstellung modultheoretischer Ergebnisse vorbereitet. Die Anwendung auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme liefert ein Lösbarkeitskriterium, das ein Analogon zum „Längensatz“ der Idealtheorie darstellt und alle bekannten Lösbarkeitskriterien als Spezialfälle enthält. — Eine entsprechende Behandlung der übrigen Determinanten- und Elementarteiler ist im allgemeinen nicht möglich. — Die wesentlichsten Definitionen und Sätze des ersten Teils seien kurz zusammengestellt:  $V$  sei der  $m$ -dimensionale Spaltenvektorraum über  $P[x]$ . Sind  $M, N$  Teilmoduln von  $V$ ,  $\alpha, \beta, \dots$  Skalare aus  $P[x]$ , so sei  $M:\alpha$  der Modul aller Vektoren  $v$  mit  $\alpha v \in M$  und  $M:N$  das Ideal aller Skalare  $\alpha \in P[x]$  mit  $\alpha n \in M$  für alle  $n \in N$ . Ein irreduzibler Skalar  $\pi \neq 0$  heißt ein „non-zero associated prim“ von  $M$ , wenn  $M:\pi \supset M$  (echtes Umfassen). Die Abschließung  $\text{Cl}(M)$  eines Moduls  $M$  besteht aus allen Vektoren  $v \in V$ , zu denen es ein  $\alpha \in P[x]$ ,  $\alpha \neq 0$ , gibt mit  $\alpha v \in M$ . Das (bis auf Konstante aus  $P$ ) eindeutig bestimmte erzeugende Element des Ideals  $M:\text{Cl}(M)$  ist der Elementarteiler  $\varepsilon$  von  $M$ . Ein Modul  $M$  heißt abgeschlossen, wenn  $M = \text{Cl}(M)$  ist. Die „non-zero a.p.s.“ eines nicht-abgeschlossenen Moduls sind die irreduziblen Faktoren von  $\varepsilon$ . Ein Modul ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn  $\varepsilon \in P$ . Für Moduln wird der Begriff der Kompositionsreihe

erklärt und ein Verfeinerungssatz bewiesen. Ist für einen Modul  $M$   $\varepsilon = \prod_{v=1}^h \pi_v^{e_v}$  eine Zerlegung in irreduzible Faktoren, bedeuten ferner  $l_v$  die Längen der Kompositionsreihen von  $N$  nach



$M: \pi_p^{\nu}$ , so wird die Norm  $A(M)$  definiert als  $A(M) = \prod_{\nu=1}^h \pi_p^{\nu}$ . Es ist  $\varepsilon$  stets ein Teiler von  $A$ .

Ist ferner  $A$  eine  $m$ -reihige Matrix mit Elementen aus  $P[x]$ ,  $M$  der von ihren Spaltenvektoren erzeugte Modul, so stimmen  $\varepsilon$  und  $A(M)$  mit dem in üblicher Weise definierten höchstens Elementar- bzw. Determinantenteiler von  $A$  überein.  $\mathcal{C}(M)$  ist abgeschlossen, hat über  $P[x]$  denselben Rang wie  $M$  und enthält alle Moduln  $N \supset M$ , die ebenfalls diesen Rang besitzen. Sind  $M_1 \subset M_2$  zwei Moduln, so ist  $M_1 = M_2$  dann und nur dann, wenn  $M_1$  und  $M_2$  gleichen Rang und gleiche Norm besitzen. Hieraus folgt unmittelbar ein Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme. Bei den Anwendungen der Theorie auf lineare, homogene Differentialgleichungssysteme handelt es sich um die Auffindung und Struktur der Exponentiallösungen. Eine wesentliche Bemerkung schließt an die Definition der trivialen Lösung an; Diese kann im allgemeinen invariant nur durch den Zeilenmodul charakterisiert werden. Verf. zeigt, daß im vorliegenden Fall  $\varepsilon$  und  $A$  für den Spalten- und Zeilenmodul dieselben sind. Bei allgemeineren Skalarbereichen braucht dies jedoch nicht der Fall zu sein.

Kowalsky (Erlangen).

**Snapper, Ernst:** Polynomial matrices in several variables. Amer. J. Math. 69, 622—652 (1947).

Verf. schließt an die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit an und untersucht den Spezialfall, daß der Ring  $\mathfrak{s}$  der Polynomring  $P[x_1, \dots, x_n]$  über dem kommutativen Körper  $P$  ist. Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung der Theorie auf Systeme partieller linearer, homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Falle  $\chi(P) = 0$ . Ist  $H$  die multiplikative Gruppe der linearen Exponentiale  $\exp(\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n)$ , so sei  $L$  der Gruppenring von  $H$  über  $P[t_1, \dots, t_n]$  und  $U$  der  $m$ -dimensionale Spaltenvektorraum über  $L$ . Andererseits sei  $V$  der  $m$ -dimensionale Zeilenvektorraum über  $P[x_1, \dots, x_n]$  und  $V[D_1, \dots, D_n]$  der Vektorraum, der aus  $V$  entsteht, wenn man dort in den Koordinatenpolynomen die  $x_i$  durch die Operatoren  $D_i$  ersetzt.  $D_i$  bedeutet dabei den Differentialoperator  $\partial/\partial x_i$ . Ein System partieller linearer homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird gegeben durch ein System  $S$  von Operatorvektoren aus  $V[D_1, \dots, D_n]$ . Verf. bestimmt die Struktur des Lösungsmoduls  $\subset U$  über einem geeigneten Erweiterungskörper von  $P$ . — Im zweiten Teil der Arbeit wird eine allgemeine Theorie der Polynommoduln entwickelt. Neben den  $m$ -dimensionalen Zeilenvektorraum  $V$  über  $P[x_1, \dots, x_n]$  wird der  $m$ -dimensionale Zeilenvektorraum  $F$  über  $P[x_0, x_1, \dots, x_n]$  gestellt. Ein Vektor  $v \in F$  heißt ein homogener Vektor oder eine Vektorform vom Grad  $\partial$ , wenn nicht alle seiner Koordinaten verschwinden und die Koordinaten  $\neq 0$  homogene Polynome vom Grade  $\partial$  aus  $P[x_0, \dots, x_n]$  sind. Ein beliebiger Vektor  $v \in F$  läßt sich stets als endliche Summe von Vektorformen darstellen. Ein Modul  $H \subset F$  heißt homogen, wenn für jeden Vektor  $v \in H$  auch alle seine homogenen Komponenten zu  $H$  gehören. Im Anschluß an diese Definitionen werden die homogenen Moduln näher untersucht und in Beziehung zu Teilmoduln von  $V$  gesetzt. Im weiteren Verlauf der Untersuchungen wird der Grad eines Moduls  $M$  mit Hilfe der charakteristischen Funktion von  $M$  definiert. Sind  $M \subset N$  zwei Moduln von  $F$ , so bedeute  $\chi(\varrho; N/M)$  die größte Anzahl von Vektorformen des Grades  $\varrho$  aus  $N$ , die über  $P$  mod.  $M$  linear unabhängig sind. Ist  $\mathfrak{C}$  ein multiplikativ abgeschlossenes System  $\subset P[x_0, \dots, x_n]$ , so sei  $M(\mathfrak{C})$  der Modul aller Vektoren  $v$ , zu denen es ein  $\gamma \in \mathfrak{C}$  gibt mit  $\gamma v \in M$ . Die charakteristische Funktion von  $M$  bezüglich  $M(\mathfrak{C})$  ist dann definiert als  $\chi(\varrho; M(\mathfrak{C})/M)$ . Neben weiteren Untersuchungen über Elementarteiler usw. werden die Ergebnisse auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme über  $P[x_1, \dots, x_n]$  angewandt.

Kowalsky (Erlangen).

**Császár, Akos:** Sur les formes quadratiques positives. Publ. Math., Debrecen 1, 186—188 (1950).

Verf. beweist durch vollständige Induktion das bekannte Determinantenkriterium für positive quadratische Formen:  $f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$  ist dann und nur dann positiv, wenn die ersten Hauptunterdeterminanten jeder Ordnung  $D_1 = a_{11}$ ,  $D_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ ,  $\dots$ ,  $D_n = |a_{ik}|$  positiv sind.

Brandt (Halle).

**Szele, T.:** Klassifikation der quadratischen Formen. Publ. Math., Debrecen 1, 189—192 (1950).

Anderer Beweis desselben Satzes, vgl. vorstehende Besprechung. Brandt.

**Turnbull, H. W.:** Note on the simultaneous system of two quaternary quadratics. Addendum. J. London math. Soc. 22, 163—165 (1947).

Ein volles System von projektiven Komitanten von zwei quaternären quadratischen Formen wurde zuerst 1903 von P. Gordan aufgestellt. 1919 zeigte H. W. Turnbull [Proc. London math. Soc., II. S. 18, 69—94 (1919/20)], daß sich die 580 Gordanschen Komitanten auf 125 reduzieren lassen. In einen Brief an den Verf. teilt J. A. Todd schließlich mit, daß sich diese 125 Komitanten auf 116



irreduzible zurückführen lassen. Diese Reduktion beruht auf der Reduzibilität der Komitante  $\Phi = (Ap)(Bp)(A\beta x)(B\alpha x)(\alpha\beta p)$ , was Verf. kurz ausführt. *Weitzenböck.*

**Brauer, Alfred:** A criterion for a common root of  $k$  algebraic equations. *Amer. math. Monthly* **57**, 322—324 (1950).

Let  $f_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$ , denote arbitrary polynomials of degree  $n$ , every  $n$  of which are linearly independent, and each of which is non-negative for  $0 \leq x \leq 1$  and has  $n$  zeros (counting multiplicities) in that interval. Let  $f(x)$  be one of the  $n+1$  polynomials  $f_j(x)$  and  $F(x)$  the sum of the  $n$  other polynomials. Then the polynomials  $f_j(x)$  have a common zero if and only if  $f(x)$  and  $F(x)$  have a common zero, that is, if Sylvester's determinant  $R(f, F)$  is zero. As a generalization of this result, let  $f_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , denote polynomials of arbitrary degree with real or complex coefficients, and write

$$f_j(x) = g_j(x) + i h_j(x), \quad \bar{f}_j(x) = g_j(x) - i h_j(x),$$

where  $g_j(x)$  and  $h_j(x)$  are polynomials with real coefficients. If one of the  $f_j(x)$ , say  $f_1(x)$ , has only real zeros, then a necessary and sufficient condition that the polynomials  $f_j(x)$  have a common zero is that  $f_1(x)$  and  $F(x)$  have a common zero,

$$\text{where } F(x) = \sum_{j=2}^k f_j(x) \bar{f}_j(x) = \sum_{j=2}^k [g_j^2(x) + h_j^2(x)]. \quad E. Frank \text{ (Chicago, Ill.)}.$$

**Montel, Paul:** Sur les zéros des polynômes associés à un polynôme. *Acta Sci. math.*, Szeged **12B**, L. Féjer et F. Riesz LXX annos natis dedic., 131—136 (1950).

Soit  $\pi(z) = P(z) + iQ(z)$  un polynôme à coefficients complexes,  $P$  et  $Q$  étant des polynômes à coefficients réels. Généralisant un résultat de M. Fujiwara [*Tôhoku math. J.* **9**, 102—108 (1916)], l'A. montre que si  $\pi(z)$  admet  $p$  zéros dans le demi-plan supérieur et  $q$  zéros dans le demi-plan inférieur (avec  $p > q$ ), tout polynôme  $P(z) + \lambda Q(z)$  ( $\lambda$  réel) admet au moins  $p - q$  zéros réels distincts. Il en déduit des résultats sur la forme du développement en éléments simples de la fraction rationnelle  $R(z) = P(z)/Q(z)$ . *J. Dieudonné (Nancy).*

**Orts, José-Maria:** Veränderung der Wurzeln einer Gleichung. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. **7**, 128—131 (1947) [Spanisch].

L'A. studia la equazione algebrica

$$x^n + a x^p + b x^q + c x^r + \dots + l,$$

con  $a, b, c, \dots, l$  costanti positive,  $n > p > q > r > \dots$  interi positivi,  $p, q, r, \dots$  fissi,  $n$  variabile. Essa ha, manifestamente, una sola radice reale positiva  $x_n$ . L'A. dimostra che la successione  $(x_n)$  è monotona e convergente. Nel caso particolare  $x^n + x^p = c$  l'A. studia il limite di  $x_n$ , e quello di  $x_n^n$ , per  $n \rightarrow +\infty$ ; fa qualche osservazione anche sull'equazione  $x^n + x^{n-1} = 1$ , nella quale  $p = n - 1$  non è costante. *F. Cecioni (Pisa).*

**Parodi, Maurice:** Sur la définition des réseaux électriques maillés dont l'équation aux fréquences propres a ses racines à l'intérieur d'un cercle donné. *J. Phys. Radium* **11**, 141—143 (1950).

Es werden auf einfache Weise hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Nullstellen der Determinante  $|l_{ik} z^2 + r_{ik} z + s_{ik}| = 0$  ( $l_{ik}, r_{ik}, s_{ik}$  definit positive Matrizen) im Innern des Einheitskreises oder des Kreises vom Radius  $R$  um den Nullpunkt liegen. Diese Bedingungen lauten für den Radius  $R$ :

$$R^2 l_{ii} > R^2 \sum_{k \neq i} |l_{ik}| + R \sum_k |r_{ik}| + \sum_k |s_{ik}|.$$

Durch Verschiebung des Nullpunktes in die linke Halbebene erhält man daraus in einfacher Weise hinreichende Bedingungen dafür, daß die Nullstellen sämtlich negativen Realteil besitzen; diese Realteile liegen im übrigen zwischen bestimmten Grenzen, die vorgegeben werden können, und die Eigenfrequenzen liegen unterhalb einer vorgegebenen Schranke. *Schmeidler (Berlin).*



Vazsonyi, A.: A generalization of Nyquist's stability criteria. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 863—867 (1949).

Mason, S. J.: A comment on Dr. Vazsonyi's paper, „A generalisation of Nyquist's stability criteria“. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 867 (1949).

Das Nyquist'sche Stabilitätskriterium für eine Gleichung

$$w = f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0 = 0$$

mit reellen Konstanten  $A_0, \dots, A_n$  benutzt bekanntlich die Abbildung der rechten Halbebene in  $z$  auf die  $w$ -Ebene, deren Begrenzung durch das Bild von  $f(i\omega)$  für  $-\infty < \omega < +\infty$  gegeben ist. Liegt der Nullpunkt innerhalb des Bildbereiches der rechten Halbebene, so ist die Gleichung instabil, liegt er außerhalb, stabil. Die hier gegebene Verallgemeinerung besteht darin, daß nicht die rechte Halbebene in  $z$ , sondern ein Sektor abgebildet wird, der vom Nullpunkte aus die rechte Halbebene umfassend in die linke übergreift, insofern seine Begrenzungsgeraden einen Winkel  $\mu$  nach links gegen die imaginäre Achse einschließen. Die Größe  $\zeta = \sin \mu$  ist ein Stabilitätsmaß. Man benutzt demgemäß die Abbildung von  $f[\omega(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})]$  für alle reellen  $\omega$ ; enthält der Abbildungsbereich den Nullpunkt nicht im Innern, so liegt Stabilität vor und das Dämpfungsverhältnis ist größer als  $\zeta$ . An numerischen Beispielen wird die Methode erläutert. — Die Note von Mason benutzt das ursprüngliche Nyquist-Verfahren durch zeichnerische Ausgestaltung mit Hilfe eines Netzwerkes in der Nähe des kritischen Punktes. *Schmeidler* (Berlin).

Schwarz, Štefan: On universal forms in finite fields. Časopis Mat. Fys., Praha 75, 45—50 und tschechische Zusammenfassg. 50 (1950).

Es wird bewiesen, daß

$$(1) \quad a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_k x_k^k = b \quad (a_1, \dots, a_k \neq 0)$$

mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_k, b$  und Unbekannten  $x_1, \dots, x_k$  in dem endlichen Körper  $GF(p^n)$  von  $p^n$  Elementen ( $p$  Primzahl) unter der Bedingung  $(p^n - 1, k) \leq p - 1$  stets lösbar ist. In zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 30, 113; 31, 109) hat Verf. die beiden Spezialfälle schon erledigt:  $\alpha) a_1 = \cdots = a_k = 1$ ;  $\beta) k|p - 1$ . Der Beweis des obigen allgemeinen Satzes ist von den genannten vorigen Resultaten unabhängig. Man darf  $k|p^n - 1$  annehmen. Bezeichne  $T_p$  den Primkörper von  $GF(p^n)$ , die Elemente werden mit den rationalen Zahlen  $0, \dots, p - 1$  bezeichnet. Wegen der Annahme enthält  $x^{(p^n - 1)/k} - 1$  in  $T_p$  einen Primfaktor  $n$ -ten Grades (vgl. das erste der oben zitierten Referate), eine Wurzel werde mit  $j$  bezeichnet, dann läßt sich  $GF(p^n) = T_p(j)$  setzen. Für ein Element

$$d = u_0 + u_1 j + \cdots + u_{n-1} j^{n-1} \quad (\neq 0; u_k = 0, \dots, p - 1)$$

werde die Anzahl  $l = l(d)$  der nichtverschwindenden  $u_i$  die Länge von  $d$  genannt. Bezeichne nun  $\mathfrak{G}$  die multiplikative Gruppe von  $T_p(j)$  und  $\mathfrak{H}$  die Untergruppe der  $k$ -ten Potenzen; es gilt  $j \in \mathfrak{H}$ . Leicht läßt sich eine spezielle Zerlegung

$$\mathfrak{G} = c_1 a_1 \mathfrak{H} + \cdots + c_k a_k \mathfrak{H} \quad (c_i = 1)$$

konstruieren, in der nämlich der Reihe nach für  $t = 1, \dots, k$  die Länge von  $c_t = c_{0t} + \cdots + c_{n-1t} j^{n-1}$  ( $c_{0t} = 1, \dots, p - 1$ ;  $c_{it} \in T_p$ ) und dabei auch noch  $c_{0t}$  möglichst klein ist. Statt des Satzes läßt sich dann allgemeiner beweisen, daß die Elemente von  $c_t a_t \mathfrak{H}$  in der Form  $a_1 x_1^k + \cdots + a_t x_t^k$  ( $t = 1, \dots, k$ ) darstellbar sind. Für  $t = 1$  ist das trivial, für  $t \geq 2$  folgt aus obiger Konstruktion, daß  $(c_t - 1) a_t \mathfrak{H}$  im Abschnitt  $c_1 a_1 \mathfrak{H} + \cdots + c_{t-1} a_{t-1} \mathfrak{H}$  enthalten ist, woraus die Behauptung mit leichter Induktion folgt. *Rédei* (Szeged).

### Gruppentheorie:

Prachar, Karl: Zur Axiomatik der Gruppen. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa 155, 97—102 (1947).

Verf. gibt ein einfaches Beispiel für eine endliche Menge  $G$  von Elementen,



welche die folgenden Postulate erfüllen, ohne eine Gruppe zu sein. — 1. Zu jedem Elementepaar  $a \in G$ ,  $b \in G$  gehört ein eindeutig bestimmtes Produkt  $ab \in G$ . — 2. Das Produkt ist assoziativ. — 3. Es existiert mindestens ein Element  $e$  mit  $ea = a$  ( $a \in G$ ). — 4. Zu jedem  $a \in G$  existiert mindestens ein Element  $a^{-1}$  mit  $aa^{-1} = e$ . — Es wird dann die Struktur aller Systeme untersucht, die 1.—4. erfüllen. Szép (Szeged).

**Murata, Kentaro:** On the quotient semi-group of a noncommutative semi-group. Osaka math. J. 2, 1—5 (1950).

Ein Element  $\lambda$  einer Halbgruppe  $g$  heißt regulär, wenn sowohl aus  $a\lambda = b\lambda$  wie aus  $\lambda a = \lambda b$  stets  $a = b$  folgt. Die regulären Elemente bilden eine Halbgruppe  $g^*$ . Ist  $m$  eine Teilhalbgruppe von  $g^*$ , so heißt eine  $g$  umfassende Halbgruppe  $G$  eine Quotientenhalbgruppe von  $g$  bezüglich  $m$ , wenn  $G$  eine Einheit besitzt, jedes Element  $\alpha$  aus  $m$  ein Inverses in  $G$  besitzt, und wenn zu jedem  $x \in G$  ein  $\alpha \in m$  existiert mit  $\alpha x \in g$ . Es wird bewiesen, daß eine solche Quotientenhalbgruppe dann und nur dann existiert, wenn zu jedem  $a \in g$  und jedem  $\lambda \in m$  ein  $a' \in g$  und ein  $\lambda' \in m$  existieren mit  $\lambda'a = a'\lambda$ .  $G$  ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist  $g$  gleichzeitig ein Ring, so läßt sich die Addition in einfacher Weise auf  $G$  ausdehnen und man erhält so den Linksquotientenring von  $g$  bezüglich  $m$ . G. Köthe (Mainz).

**Utumi, Yuzo:** On hypergroups of group right cosets. Osaka math. J. 1, 73—80 (1949).

Eine Gruppe  $G$  definiert mit einer Untergruppe  $H$  die Hypergruppe  $G/H$  der (rechtsseitigen) Restklassen. Verf. widerlegt die Vermutung, daß jede „Co-Gruppe“ im Sinne von J. E. Eaton [Duke math. J. 6, 101—107 (1940); dies. Zbl. 27, 8] einer solchen Hypergruppe isomorph ist. Lorenzen (Bonn).

**Michiura, Tadashi:** On a definition of lattice ordered groups. J. Osaka Inst. Sci. Technology 1, 27 (1949).

Im Anschluß an eine Bemerkung von G. Birkhoff [Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 298—331 (1942)] — inzwischen auch in die Neuauflage von Lattice theory S. 215, Ex 4 (dies. Zbl. 33, 101) aufgenommen — daß die  $b$ -Gruppen mit Hilfe einer unären Operation  $a \rightarrow a^*$  definiert werden können, zeigt der Verf. die Äquivalenz der folgenden Bedingungen mit dem Stoneschen Postulate: A)  $0^* = 0$ . B)  $c = -(c)^* + c^*$ . C)  $(a - b)^* + b$  ist assoziativ. D)  $a + x^* - a = (a + x - a)^*$ . Hierbei bezeichnet  $+$  die nicht notwendig kommutative Gruppenoperation. — Bedingung D), die in Annals 43 fehlt, findet man in Lattice theory; an beiden Stellen stehen die Summanden auf der rechten Seite von B) in der umgekehrten Reihenfolge. — Zusätzlich sei bemerkt, daß die Bedingung C) mit  $(x^* + y)^* - y^* = (x + y - y^*)^*$  äquivalent ist. Damit soll einem Wunsche von G. Birkhoff nach einer „less clumsy form“ [Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 302 (1942)] entsprochen werden.

F. W. Levi (Bombay).

**Sato, Shoji:** On groups and the lattice of subgroups. Osaka math. J. 1, 135—149 (1949).

Die Struktur einer Gruppe  $G$  ist weitgehend abhängig von der Struktur des Verbandes  $L$  aller Untergruppen von  $G$ . Für modulares  $L$  hat K. Iwasawa [J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I, 4, 171—199 (1941)] die Struktur von  $G$  bestimmt. Verf. erweitert diese Methode auf nach oben (bzw. unten) halbmodulares  $L$  — charakterisiert durch  $\dim a/a \wedge b = 1 \rightarrow \dim a \vee b/b = 1$ . Lorenzen (Bonn).

**Takahasi, Mutuo:** On partitions of free products of groups. Osaka math. J. 1, 49—51 (1949).

Wenn eine Gruppe dargestellt werden kann als Vereinigungsmenge echter Untergruppen, die paarweise nur die Gruppeneins gemeinsam haben, so wird sie „decomposable“ genannt; insbesondere heißt sie „completely decomposable“, wenn die bedeckenden Gruppen alle zyklisch sind. (Andere Autoren sprechen von „partition“.) Es wird bewiesen, daß das freie Produkt von Gruppen stets „decomposable“



ist. Als bedeckende Gruppen können dabei die freien Faktoren, ihre Konjugierten und zyklische Gruppen gewählt werden. Daraus folgt, daß freie, nicht-zyklische Gruppen (ebenso freie Produkte zyklischer Gruppen) „completely decomposable“ sind. Eine später beigefügte Fußnote berichtet, daß in einer Arbeit von P. G. Konotorovič [Mat. Sbornik, n. S. 22, 79—100 (1948)], deren Original weder dem Verf. noch dem Referenten zugänglich ist, dasselbe Resultat abgeleitet wurde. *F. Levi.*

**Baer, Reinhold:** Ein Einbettungssatz für Gruppenerweiterungen. Arch. Math., Karlsruhe 2, 178—185 (1950).

Let  $G$  be an extension of the group  $M$  by the group  $E$ , i. e.  $M$  is normal subgroup of  $G$  and  $G/M \cong E$ . The elements of  $G$  induce automorphisms in  $M$  which belong to the same class of automorphisms of  $M$  if the elements belong to the same coset modulo  $M$ . Thus the extension induces a well-determined homomorphism of  $E$  into the group  $A$  of automorphism classes of  $M$ . The author proves: Let  $\Phi$  be the set of all extensions of the group  $M$  by the group  $E$  for which this homomorphism of  $E$  into  $A$  is the same. Then there exists an extension  $H$  of a group  $N$  by the group  $E$  with the following properties: 1.  $N$  is the direct product of  $M$  and a free abelian group (of rank  $jn$ , where  $j+1$  is the cardinal of  $E$ ,  $n+1$  that of the set  $\Phi$ ); 2.  $H$  contains — in the usual meaning in this connection — all extensions  $G$  of  $M$  by  $E$  in the set  $\Phi$ ; 3.  $H$  is, in a well determined sense, a maximal group of its kind (for details we have to refer to the paper). The proof of this embedding theorem avoids all use of factor systems or related tools. Instead  $H$  is constructed as follows: Form the free product  $S$  of all the extensions in  $\Phi$  amalgamating their common subgroup  $M$ . Let  $K$  be the kernel of the unique homomorphism of  $S$  onto  $E$  (i. e.  $M \subseteq K$ ),  $Z$  the centraliser of  $M$  in  $S$ . The commutator group  $L$  of  $Z \cap K$  is normal in  $S$ . Now  $H$  may be taken as  $S/L$ , and  $N$  as  $K/L$ . — Amongst the consequences of the theorem is a necessary and sufficient condition for the extension  $G$  of  $M$  by  $E$  to be contained in a splitting extension  $H$  of  $N$  by  $E$  with the property that  $N$  is the direct product of  $M$  and a free abelian group. Artin's theorem relating to the case of abelian  $M$  appears as a special case of this. — The author draws attention to work on splitting extensions by Takejiro Seki [Tôhoku math. J. 48, 235—238 (1941)], not available to him until after his paper was in print.

*Hanna Neumann (Hull).*

**Gol'fand, Ju. A.:** Über Gruppen, deren sämtliche Untergruppen speziell sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1313—1315 (1948) [Russisch].

Über nicht-nilpotente endliche Gruppen  $\Gamma$ , deren Untergruppen sämtlich nilpotent sind, hat O. Ju. Schmidt [Mat. Sbornik 31, 366—372 (1924)] folgendes bewiesen: 1.  $\Gamma$  besitzt einen Sylow-Normalteiler  $\Sigma$  der Ordnung  $q^b$ , dessen Faktorgruppe  $\Gamma/\Sigma$  zyklisch von Primzahlpotenz-Ordnung  $p^\alpha$  ist. 2. Wenn  $P$  ein Element der Ordnung  $p^\alpha$  ist, so liegt  $P^p$  im Zentrum von  $\Gamma$ . 3. Der größte Normalteiler  $\Phi$  von  $\Gamma$ , der in  $\Sigma$  enthalten ist, hat den Index  $(\Sigma:\Phi) = q^b$ , wobei  $b$  der Exponent ist, zu dem  $q$  (modulo  $p$ ) gehört. 4. Jedes Element  $P$  der Ordnung  $p^\alpha$  ist mit allen Elementen von  $\Phi$  vertauschbar. 5. Wenn  $\Sigma$  Abelsch ist, so ist es elementar-Abelsch. [Für diesen letzteren Fall siehe Miller und Moreno, Trans. Amer. math. Soc. 4, 398—404 (1903)]. Verf. gibt weitere Eigenschaften dieser Gruppen an: Satz 1: Wenn die Gruppe  $\Sigma$  nichtabelsch ist, so ist  $\Phi$  gleichzeitig das Zentrum, Kommutatorgruppe und Frattini-Untergruppe von  $\Gamma$ . Satz 2: Wenn die Gruppe  $\Sigma$  nichtabelsch ist, so ist  $\Phi$  eine elementare Gruppe. Für  $q \neq 2$  sind die Ordnungen aller Elemente von  $\Phi$  gleich  $q$ ; für  $q = 2$ , sind die Ordnungen aller Elemente von  $\Phi$  gleich 4 oder 2, aber nicht alle gleich 2. Satz 3: Wenn  $p$ ,  $q$  und  $\alpha$  gegeben sind, so gibt es im wesentlichen nur eine Gruppe  $\Gamma_0$  der untersuchten Art, mit der Ordnung  $p^\alpha q^{b_0}$ , wobei  $\beta_0$  für ungerades  $b$  gleich  $b$ , für gerades  $b$  gleich  $\frac{3}{2}b$  ist. Alle übrigen Gruppen dieser Art entstehen als Faktorgruppen von  $\Gamma_0$  nach zentralen Normalteilern.

*K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).*



**Zassenhaus, Hans:** An equation for the degrees of the absolutely irreducible representations of a group of finite order. *Canadian J. Math.* **2**, 166—167 (1950).

Let  $G$  be a finite group of order  $N$ , and let  $R(X)$  denote the regular representation of its group ring over the field of rationals. An element  $C$  of the group ring, called the Casimir operator (cf. this Zbl. **2**, 265), is defined in terms of the sums of conjugate elements, and an explicit formula is derived for its representing matrix  $R(C)$ . On the other hand it is shown that the coefficients of  $R(C)$  are rational integers, and that the characteristic roots of  $R(C)$  are the numbers  $N/f$ , each repeated  $f^2$  times, where  $f$  ranges over the degrees of the absolutely irreducible representations. A corollary is that each degree  $f$  divides the order  $N$  of the group. [Misprint in formula (4): for the last suffix  $A$  read  $T$ .] B. H. Neumann (Manchester).

**Piccard, Sophie:** Les groupes engendrés par un système connexe de cycles d'ordre sept et les bases des groupes symétrique et alterné de degré  $n > 10$  dont l'une des substitutions est un cycle du septième ordre. *Comment. math. Helvetici* **24**, 4—17 (1950).

Soit  $(T)$  un système de substitutions (circulaires),  $T_i$ , des éléments de l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , tel que tout élément de  $E$  soit déplacé par une  $T_i$  au moins. Soit  $(T')$  un autre système de substitutions circulaires des éléments de  $E'$  ( $E$  et  $E'$  disjoints), tel que tout élément de  $E'$  soit également déplacé par une  $T'_i$  au moins. Un système est „connexe“ s'il est impossible de le décomposer en deux sous-systèmes tels que  $(T)$  et  $(T')$ . Exemple:  $(T) = (12); (234); (45)$  est connexe. Au contraire  $(12); (23); (45)$  ne l'est pas et se décompose en deux systèmes connexes:  $(12); (23)$  et  $(45)$ . De tels systèmes ont déjà été envisagés par l'A.: (Sur les bases du groupe symétrique. Neuchâtel 1946, p. 8; p. 105). 1. L'A. étudie les groupes (de substitutions de  $n$  lettres) engendrés par un système connexe de  $k$  bases cycliques du 7<sup>e</sup> ordre ( $k > 1$ ). Une énumération complète des cas:  $k = 2$ ;  $n = 7, 8, 9$  est présentée, faisant suite à certains résultats de l'A. (ce Zbl. **33**, 99) avec  $n \leq 7$ . On trouve pour  $n = 7$ : 6 fois  $G_7$ , 84 fois des  $G_{168}$  isomorphes et 630 fois  $A_7$ ; pour  $n = 8$ , deux  $G_{56}$  isomorphes, un  $G_{168}$  isomorphe aux précédents, deux  $G_{1344}$ , en tout, 630 diviseurs propres de  $A_8$  et 4410 fois  $A_8$ ; pour  $n = 9$ , 252 groupes d'ordre 504 et 14868 fois  $A_9$ . Au moyen de ces résultats particuliers et de deux lemmes de P. Hoyer, on parvient à la proposition générale: Tout système connexe de cycles du 7<sup>e</sup> ordre de plus de 9 lettres est une base du groupe alterné de ces lettres. — 2. La „distance“ entre 2 lettres d'un même cycle de degré  $m$  est le résidu positif (mod  $m$ ) de la différence entre les rangs de ces lettres dans le cycle. Si  $S$  et  $T$  sont 2 substitutions de  $n$  éléments ( $n > 7$ ,  $T$  circulaire du 7<sup>e</sup> ordre et contenant au moins un élément de chaque cycle de  $S$ ) l'A. donne la condition pour que  $\{S, T\}$  soit imprimitif: Les ordres des cycles de  $S$  et les distances entre les éléments appartenant à  $T$ , mesurées dans chaque cycle de  $S$ , ne sont pas des nombres premiers entre eux. 3. Pour  $n > 9$ , si  $T$  et  $S$  sont primitives, elles engendrent  $\mathfrak{S}_n$  si  $S$  déplace un nombre impair de lettres, et  $A_n$  dans le cas contraire. Page 7, ligne 5, lire 1; 2, ..., 7, 8 au lieu de 1, ..., 7. Page 10, ligne 16, lire  $b_7$  au lieu de  $b_8$ . A. Sade (Marseille).

**Tits, J.:** Généralisation des groupes projectifs. III. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **35**, 568—589 (1949).

L'A. continue son article (ce Zbl. **34**, 305) sur les généralisations des groupes projectifs. Dans les deux premières communications, il a étudié les groupes triplement transitifs et leurs cas particuliers, les groupes projectifs et sémi-projectifs, sans faire aucune hypothèse concernant l'espace  $E$  dans lequel opèrent les transformations du groupe. — Dans cette troisième communication, il examine le cas particulier où cet espace n'a qu'un nombre fini  $N + 1$  de points. P. ex. il donne la réponse à la question suivante: „Étant donnés  $N + 1$  points, quels sont les groupes triplement transitifs opérant sur ces points.“ — Lorsque  $N = 2^n$  ou  $p^{2k+1}$  ( $p$  est un nombre premier) il en existe respectivement  $(N - 2)!/n$  ou  $(N - 2)!/(2k + 1)$ ; ce sont tous des groupes projectifs, semblables entre eux. Lorsque  $N = p^{2k}$  ( $p \neq 2$ ), il existe  $(N - 2)!/2k$  groupes projectifs tous semblables. Pour les autres valeurs de  $N$ , il n'en existe pas. F. Kárteszi (Budapest).

**Tits, J.:** Généralisations des groupes projectifs. IV. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **35**, 756—773 (1949).

Dans cette quatrième communication, l'A. continue son article sur les généralisations des groupes projectifs (ce Zbl. **34**, 305; **35**, 296; analyse précéd.). Soit  $E$  un ensemble de  $N + 1$  points et supposons qu'il est possible de définir sur cet ensemble des



groupes triplement transitifs de transformations, alors  $N = p^n$  (où  $p$  est nombre premier). L'A. a montré dans la troisième communication que deux cas peuvent être distingués: (a) lorsque  $p = 2$  ou  $n = 2k + 1$ , tous les groupes triplement transitifs opérant dans  $E$  sont projectifs; (b) lorsque  $p \neq 2$  et  $n = 2k$ , ils existent des groupes projectifs et des groupes triplement transitifs non projectifs opérant dans  $E$ . Il a désigné respectivement par  $E_H$  et par  $E_G$  les espaces organisés que l'on obtient en choisissant, parmi les groupes opérant dans  $E$ , un groupe projectif  $H$  bien déterminé, ou un groupe triplement transitif non projectif  $G$  bien déterminé. Il a montré que, dans le cas (b), on peut établir une correspondance biunivoque et réciproque entre  $H$  et  $G$ , donc aussi entre  $E_H$  et  $E_G$ , de telle façon qu'à tout  $H$  est associé un  $G$  et réciproquement. Deux espaces  $E_H$  et  $E_G$  associés peuvent être considérés comme des aspects différents d'un même espace  $E_{HG}$ . — Dans cette communication il examine les propriétés des groupes  $H$  et  $G$  et des espaces associés respectivement aux groupes  $H$  et  $G$ . F. Karteszi (Budapest).

**Courtois, Jaques:** Représentations linéaires du groupe affine complexe. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 1247—1249 (1947).

### Verbände. Ringe. Körper:

**Jordan, Pascual:** Zur Quanten-Logik. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 166—171 (1950).

Die Einzelmatrizen (hermitesche Idempotenten) der Matrixalgebra der Quantenmechanik entsprechen den Rechtsidealen der Algebra und bilden daher einen modularen Verband. Bezeichnet man die Einzelmatrizen als die „Aussagen“ der Quantenmechanik, so entsteht eine „Logik“. Verf. beweist u. a., daß die Vertauschbarkeit von Einzelmatrizen  $a, b$  verbandstheoretisch durch  $ab + \bar{a}b = b$  charakterisiert ist ( $\bar{a}$  „Negation“ von  $a$ ). Lorenzen (Bonn).

**Krishnan, Viakalathur S.:** L'extension d'une ( $<,.$ ) algèbre à une ( $\Sigma^*,.$ ) algèbre. II. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1559—1561 (1950).

Für die Erweiterung halbgeordneter Gruppoide zu Halbverbänden (vgl. Verf., dies. Zbl. **35**, 302) werden einige Beispiele und Ergänzungen angegeben. Lorenzen.

**Nakayama, Tadasi and Junji Hashimoto:** On a problem of G. Birkhoff. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 141—142 (1950).

Verff. widerlegen eine Vermutung von G. Birkhoff [s. Lattice theory, New York 1940, Problem 8], nach der die Zerlegung endlicher, teilweise geordneter Systeme in das Produkt von unzerlegbaren Faktoren bis auf die Isomorphie der Faktoren eindeutig bestimmt wäre. Das gegebene Gegenbeispiel (das übrigens schon in die zweite Auflage von Birkhoffs zitierter Arbeit aufgenommen wurde), ist die direkte Summe  $A = I + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ , wo  $X^i$  das direkte Produkt von  $i$  Exemplaren des Verbandes  $X = \{0, 1\}$  mit  $0 < 1$  ist. Zwei nicht-isomorphe Zerlegungen von  $A$  sind  $(I + X)(I + X^2 + X^4)$  und  $(I + X^3)(I + X + X^2)$ . L. Fuchs (Budapest).

**Michiura, Tadashi:** Lattice ordered rings and ordered characterization of integers. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 29—31 (1949).

Verschiedene Formulierungen des Begriffes  $l$ -Ring (lattice ordered ring) werden miteinander verglichen. Ein einfach geordneter Ring mit Atom ist isomorph zu dem Ring der ganzen Zahlen. F. W. Levi (Bombay).

**Bell, E. T.:** A type of inversion of certain series. Duke math. J. **15**, 79—85 (1948).

Verf. untersucht einen sehr allgemeinen Typ von Umkehrformeln, die sich auf Funktionen über endlichen Mengen beziehen. Unter geeigneten Einschränkungen lassen sich die Ergebnisse jedoch auf den Fall abzählbarer Mengen ausdehnen. — Ist  $X_n$  eine Menge mit den Elementen  $x_1, \dots, x_n$ , so werden den Teilmengen  $X \subset X_n$



Symbole  $f(X)$  zugeordnet, die einem Modul  $M$  über einem kommutativen Ring  $C$  mit Einselement angehören und gewisse Eindeutigkeitsforderungen erfüllen. Für  $M$  werden Operatoren  $T_0, T_1, \dots, T_n$  in folgender Weise definiert: Es ist  $T_0 f(X) = f(X)$ . Für  $k > 0$  ist  $T_k f(X) = 0 \in M$ , wenn  $x_k \notin X$ ; hingegen gelte im Falle  $x_k \in X$ :  $T_k f(X) = f(X^{(k)})$ , wobei  $X^{(k)}$  aus  $X$  durch Fortnahme des Elements  $x_k$  entsteht. Die Operatoren  $T_k$  sollen mit den Elementen  $c \in C$  vertauschbar sein, und die Anwendung auf eine Summe erfolgt distributiv. Erklärt man Summe und Produkt von Operatoren, sowie auch Multiplikation von Operatoren mit Elementen aus  $C$  in der üblichen Weise, so bilden die „Operatorpolynome“ einen kommutativen Ring mit dem Einselement  $T_0$ . Die  $T_k$  mit  $k > 0$  sind nilpotent. Jedes Element  $P(T)$  aus diesem Operatorring, das sich in der Form  $T_0 + P_1(T)$  schreiben läßt, wo  $P_1(T)$  ein Operatorpolynom bedeutet, das keinen Term der Form  $c T_0$  enthält, besitzt eine eindeutig bestimmte Inverse im Operatorring. Hieraus folgt unmittelbar eine Inversionsformel für Gleichungen der Form  $F(X) = P(T)f(X)$ . — Im zweiten Teil der Arbeit untersucht Verf. den Fall  $P(T) = (T_0 + T_1) \cdots (T_0 + T_n)$ . Bedeutet  $D|X$ , daß  $D \subset X$ , ist ferner  $X/D$  das Komplement von  $D$  in  $X$  und ist  $m(D) = (-1)^{|D|}$ , wo  $|D|$  die Elementzahl von  $D$  bedeutet, so geht die Inversionsformel in die der zahlentheoretischen Schreibweise angepaßte Form

$$F(X) = \sum_{D|X} f(D), \quad f(X) = \sum_{D|X} m(D) F(X/D)$$

über. — Zum Schluß geht Verf. noch näher auf den Fall ein, daß an Stelle des Moduls  $M$  ein kommutativer Ring mit Einselement tritt. *Kowalsky* (Erlangen).

**Borofsky, Samuel:** Factorization of polynomials. Amer. math. Monthly 57, 317—320 (1950).

L'A. prende in esame il teorema: Se  $D$  è un dominio di integrità (integral domain, Integritätsbereich) a fattorizzazione unica, tale è anche il dominio di integrità  $D[x_1, \dots, x_n]$  dei polinomi nelle indeterminate  $x_1, \dots, x_n$ , coi coefficienti in  $D$ . — L'A. dà di questo teorema una dimostrazione fondata essenzialmente sulle proprietà formali. Non usa (come accade invece nelle comuni dimostrazioni) la teoria della divisibilità in  $D[x]$ , e neppure l'algoritmo della divisione; non usa il lemma di Gauss, nè il campo associato a  $D$  (quotient field, Quotientenkörper). — Il risultato è nell'ordine di idee di un analogo risultato di Zermelo (citato dall'A.) per i numeri interi naturali. In quest'ordine di idee si cerca di raggiungere subito l'unicità della scomposizione in fattori primi, indipendentemente da ogni altra proprietà della teoria della divisibilità. Il risultato è quindi interessante per l'esame critico di tale teoria.

*F. Cecioni* (Pisa).

**Brown, Bailey and Neal H. McCoy:** The maximal regular ideal of a ring. Proc. Amer. math. Soc. 1, 165—171 (1950).

Un élément  $a$  d'un anneau  $R$  est dit régulier s'il existe  $x \in R$  tel que  $axa = a$ ; un idéal bilatère est dit régulier si tous ses éléments sont réguliers. Les A. prouvent qu'il existe dans tout anneau  $R$  un plus grand idéal régulier  $M(R)$ ; ils montrent que  $M(R/M(R)) = 0$  et que, si  $R_n$  est l'anneau des matrices carrées d'ordre  $n$  sur  $R$ ,  $M(R_n) = (M(R))_n$ . Désignant par  $B^*$  l'annulateur (à droite et à gauche) d'un idéal bilatère  $B$  de  $R$ , et par  $J$  le radical de  $R$  (au sens de Jacobson), ils prouvent ensuite que  $M \cap M^* = 0$  et  $J \subset M^*$ ; si  $R/J$  est un anneau régulier, la condition  $M = 0$  équivaut à  $J^* \subset J$ . Ils montrent enfin que si  $R$  satisfait à la condition minimale pour les idéaux à droite,  $M$  est semi-simple,  $R$  est somme directe de  $M$  et  $M^*$ , et dans l'anneau  $M^*$ , l'annulateur (à droite et à gauche) du radical est contenu dans le radical, ce qui précise un théorème de M. Hall [Trans. Amer. math. Soc. 48, 391—404 (1940); ce Zbl. 25, 391]. *J. Dieudonné* (Nancy).

**Fuchs, L.:** A note on the idealizer of a subring. Publ. Math., Debrecen 1, 160—161 (1950).

L'A. appelle idéalisateur d'un sous-anneau  $T$  d'un anneau commutatif  $R$



le plus grand sous-anneau  $S$  de  $R$  dans lequel  $T$  est un idéal, c'est-à-dire l'ensemble  $T : T$  des  $x \in R$  tels que  $xt \subset T$ . Il montre que pour qu'un anneau  $R$  soit intégralement clos dans son anneau des fractions, il faut et il suffit que  $A : A = R$  pour tout idéal  $A$  de type fini de  $R$ , contenant au moins un élément non diviseur de 0. Il prouve aussi que si  $P$  est un idéal maximal dans un anneau d'intégrité noethérien  $R$ , tel que  $P : P = R$ , on a  $P \cdot P^{-1} = R$ . *J. Dieudonné* (Nancy).

**Ancochea, Germán:** Über den „Nullstellensatz“ von Hilbert. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. 29, 31—34 (1949) [Spanisch].

Nach A. Rabinowitsch [*Math. Ann.* 102, 518 (1929)] ergibt sich der Hilbertsche Nullstellensatz sofort aus folgendem Satze: Jedes vom Einheitsideal verschiedene Ideal des Polynomrings  $K[x_1, \dots, x_n]$  über dem Körper  $K$  besitzt mindestens eine Nullstelle. Rabinowitsch entnahm diesen Satz der Eliminationstheorie. Kürzlich folgerte O. Zariski (dies. Zbl. 32, 260) den Hilbertschen Nullstellensatz aus einem ähnlichen Satze, den er in einfacher Weise auf ideal- und körpertheoretischer Grundlage bewies. Im Anschluß daran gibt Verf. einen sehr durchsichtigen Beweis des obigen Satzes, der noch weniger idealtheoretische Hilfsmittel erfordert. Die Methode läßt sich auch geometrisch interpretieren und benutzt vor allem die Konstruktion eines nulldimensionalen Ideals durch Schnitte mit allgemeinen Hyper-ebenen. — Ein ganz elementarer Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes stammt von R. Brauer (dies. Zbl. 32, 260). *H. L. Schmid* (Berlin).

**Lee, H. C.:** Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. *Proc. Irish Acad. A* 52, 253—260 (1949).

$Q$  sei die Algebra der Hamiltonschen Quaternionen über dem Körper  $k$  der reellen Zahlen. Betrachtet werden  $n$ -reihige Matrizen  $A$  mit Koeffizienten aus  $Q$ . Ersetzung der Koeffizienten von  $A$  durch die konjugierten und gleichzeitige Spiegelung ordnet  $A$  die Matrix  $A^*$  zu.  $A$  heißt normal, wenn  $AA^* = A^*A$  ist. Normal sind z. B. die Hermiteschen ( $A^* = A$ ), anti-Hermiteschen ( $A^* = -A$ ) und unitären ( $AA^* = E$ ) Matrizen. Aus  $Q$  werde in willkürlicher Weise ein über  $k$  quadratischer Teilkörper  $C$  herausgegriffen. Ein Element  $a$  aus  $C$  heißt Eigenwert der Matrix  $A$ , wenn es eine einspaltige Matrix  $v \neq 0$  in  $Q$  so gibt, daß  $Av = vt$  gilt. Jede Matrix  $A$  besitzt  $2n$  paarweise bezüglich  $k$  konjugierte Eigenwerte. Für normale Matrizen gelten die bekannten Aussagen wie bei Matrizen mit komplexen Zahlkoeffizienten. Zwei normale Matrizen sind ferner unitär äquivalent dann und nur dann, wenn sie die gleichen Eigenwerte haben. Die Schlüsse beruhen sämtlich auf der Darstellung der  $n$ -reihigen Matrizen  $A$  in  $Q$  durch  $2n$ -reihige Matrizen in  $C$ . Den unitären  $A$  entsprechen so unitäre und symplektische  $2n$ -reihige Matrizen.

*Eichler* (Münster).

**Kneser, Hellmuth:** Die komplexen Zahlen und ihre Verallgemeinerung. *Math.-phys. Semesterber.*, Göttingen 1, 256—267 (1950).

Ausführliche Darstellung des Beweises des Satzes, daß jede Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen diesem Körper selbst, dem der komplexen Zahlen oder der Algebra der Quaternionen isomorph ist. *Lochs* (Innsbruck).

**Harish-Chandra:** On the radical of a Lie algebra. *Proc. Amer. math. Soc.* 1, 14—17 (1950).

Es sei  $\mathfrak{L}$  eine Liesche Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Für ein Element  $X$  aus  $\mathfrak{L}$  bedeute  $\text{ad } X$  die lineare Abbildung  $Y \rightarrow [X, Y]$  von  $\mathfrak{L}$  in sich,  $\Gamma$  sei das Radikal von  $\mathfrak{L}$ . — Es wird bewiesen, daß ein Element  $X$  aus  $\mathfrak{L}$  dann und nur dann zu  $\Gamma$  gehört, wenn  $\text{sp}(\text{ad } [X, Y] \text{ ad } Z) = 0$  für alle  $Y, Z \in \mathfrak{L}$ . Es sei ferner  $\mathfrak{S}$  eine halbeinfache Unter algebra von  $\mathfrak{L}$ , so daß  $\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \Gamma$ . Ist dann  $\mathfrak{M}$  eine weitere beliebige halbeinfache Unter algebra von  $\mathfrak{L}$ , dann gibt es einen gewissen näher gekennzeichneten Automorphismus  $\sigma$  von  $\mathfrak{L}$ , so daß  $\mathfrak{M}$  in  $\sigma \mathfrak{S}$  enthalten ist. Es folgt daraus, daß irgendeine maximale halbeinfache Unter algebra von  $\mathfrak{L}$  stets zu  $\mathfrak{L}/\Gamma$  isomorph ist.

*Weyer* (Mainz).



Wever, Franz: Operatoren in Lieschen Ringen. J. reine angew. Math. 187, 44—55 (1949).

Verf. untersucht Liesche Ringe  $A$  in ihrer treuen Darstellung  $\mathfrak{L}$  in einem assoziativen Ringe  $\mathfrak{A}$  mit freien Erzeugenden  $x, y, \dots$  und dem rationalen Zahlkörper als Koeffizientenbereich. Man vergleiche auch seine in dies. Zbl. 32, 107 besprochene Abhandlung. Hilfsmittel der Untersuchung sind Permutationsoperationen im Gruppenring der symmetrischen Gruppe. Bezeichnet  $\pi_k$  die zyklische Vertauschung der ersten  $k$  Ziffern unter Festhalten der  $m - k$  übrigen, so ist vor allem der Operator

$$\omega_m = (\varepsilon - \pi_m)(\varepsilon - \pi_{m-1}) \dots (\varepsilon - \pi_2)$$

von Wichtigkeit, wobei  $\varepsilon = \pi_1$  die identische Permutation bezeichnet. Dabei erweist sich ein bemerkenswerter, von Young geschaffener, aber zunächst wenig beachteter Kalkül, die „substitutional analysis“ in der neuen Bearbeitung von Rutherford als ein elegantes und vielseitig anwendbares Hilfsmittel, weshalb wir der von ihm angekündigten zusammenfassenden Darstellung mit größtem Interesse entgegensehen können. Der Operator  $\omega_m$  bestimmt vollständig die Struktur des Moduls  $A_m$  aller Formen der Dimension  $m$ , im besonderen die darin enthaltenen irreduziblen Darstellungsmoduln  $A_m^\alpha$  und ihre Anzahl, die explizit angegeben werden kann. Die Kenntnis der Struktur von  $A$  gibt Aussagen über freie Gruppen  $\mathfrak{F}$ . Es entspricht nämlich bei der üblichen Zuordnung die Addition in  $A$  der Multiplikation in  $\mathfrak{F}$  und die Multiplikation in  $A$  der Kommutatorbildung in  $\mathfrak{F}$ . Dem Modul  $A_m$  entspricht die Abelsche Faktorgruppe  $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{F}_{m+1}$ , wobei  $\mathfrak{F}_m$  die Glieder der absteigenden Zentralreihe sind. Es werden Aussagen über irreduzible Darstellungsmoduln gemacht, welche den Ableitungen  $\mathfrak{D}^n$  entsprechen. Dabei ergeben sich explizite Angaben über ihre Anzahlen, welche für die ersten 3 Ableitungen sämtlich aufgestellt werden. Von Wichtigkeit ist weiter, daß Verf. zu notwendigen Kriterien für die Erzeugbarkeit einer Gruppe durch eine beschränkte Anzahl von Erzeugenden geführt wird. Wenn z. B. eine Gruppe von nur 2 Elementen erzeugt wird, so liegt ihre zweite Ableitung frühestens in der fünften Untergruppe der absteigenden Zentralreihe.

Brandt (Halle).

Schwarz, Stefan: On the extension of the Jordan-Kronecker's „Principle of reduction“ for inseparable polynomials. Časopis Mat. Fys., Praha 72, 61—63 u. tschechische Zusammenfassg. 63—64 (1947).

Es sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p$ ,  $L = K(\alpha)$ ,  $M = K(\beta)$ ,  $f(\alpha) = g(\beta) = 0$ ,  $f(x)$  und  $g(x)$  irreduzibel vom Grad  $m$  bzw.  $n$  in  $K[x]$ ,  $f_i(x, y)$  und  $g_i(x, y)$  in  $K[x, y]$ ,  $f_i(x, \beta)$  irreduzibel vom Grad  $m_i$  in  $M[x]$ ,  $g_i(x, \alpha)$  irreduzibel vom Grad  $n_i$  in  $L[x]$ . Unter Ausnutzung von  $M[x]/(f(x)) \cong L[x]/(g(x))$  und der Eindeutigkeit der Zerlegung in primäre Ringe wird dann bewiesen: Aus  $f(x) = \prod_{i=1}^r f_i(x, \beta)^{p^{e_i}}$ ,

$g(x) = \prod_{i=1}^s g_i(x, \alpha)^{p^{e'_i}}$  folgt  $r = s$  und bei passender Numerierung  $m_i n = n_i m$ ,

$e_i = e'_i$  sowie  $(f(x), g_i(\beta, x)) = (f_i(x, \beta))$ . Die letzte Aussage scheint sich für den Verf. ohne weiteres aus  $(f(x), g_i(\beta, x)^{p^{e_i}}) = (f_i(x, \beta)^{p^{e_i}})$  zu ergeben. Man muß aber doch wohl die Isomorphie der Radikalrestklassenkörper der primären Ringe, also  $M[x]/(f_i(x, \beta)) \cong L[x]/(g_i(x, \alpha))$ , heranziehen, statt sich wie der Verf. mit der Isomorphie der primären Ringe selbst zu begnügen. Für die Ausnutzung der Isomorphie ist übrigens wesentlich, daß dabei die Restklasse von  $x \bmod f_i(x, \beta)$  in die von  $\alpha \bmod g_i(x, \alpha)$  übergeht.

Pickert (Tübingen).

Carruth, Philip W.: Generalized power series fields. Trans. Amer. math. Soc. 63, 548—559 (1948).

I. Kaplansky hat für bewertete, maximale Körper, die mit ihren zugeordneten Restklassenkörpern charakteristiktgleich sind, unter gewissen Voraussetzungen bewiesen, daß sie analytisch-isomorph zu Potenzreihenkörpern sind. Dabei heißt ein bewerteter Körper maximal, wenn er keinen echten Oberkörper besitzt, der dieselbe Wertegruppe und denselben zugeord-



neten Restklassenkörper zuläßt. Verf. erweitert diese Ergebnisse und stellt Kriterien auf, die nicht an die Voraussetzung über die Charakteristik gebunden sind. — Im ersten Teil der Arbeit konstruiert Verf. zunächst einen verallgemeinerten Potenzreihenkörper: Sei  $K$  ein Körper mit einer Exponentenbewertung  $w$ , deren Werte in einer angeordneten additiven Gruppe  $\Gamma$  liegen.  $\mathbb{K}$  sei der durch die Bewertung dem Körper  $K$  zugeordnete Restklassenkörper. Ferner sei  $M$  ein geeignet gewähltes Repräsentantensystem in  $K$  für die Restklassen von  $\mathbb{K}$  derart, daß 0 und 1 aus  $K$  als Repräsentanten der entsprechenden Elemente von  $\mathbb{K}$  auftreten. Schließlich sei  $G$  ein Repräsentantensystem der Werte aus  $\Gamma$  in  $K$ , wobei  $1 \in K$  Repräsentant von  $0 \in \Gamma$  ist. Ist nun  $\Phi$  eine beliebige Teilmenge von  $\Gamma$ , die hinsichtlich der Anordnung von  $\Gamma$  wohlgeordnet ist, so bezeichnet Verf. den Ausdruck  $\sum_{\alpha \in \Phi} a_{\alpha} t^{\alpha}$  als eine verallgemeinerte Potenzreihe. Dabei sind die

$a_{\alpha}$  Elemente aus  $M$  und die  $t^{\alpha}$  die Repräsentanten aus  $G$  für die entsprechenden Werte  $\alpha$ . Das System aller solcher Potenzreihen wird mit  $M(t^{\Gamma})$  bezeichnet. Verf. erklärt in  $M(t^{\Gamma})$  Gleichheit, Addition und Multiplikation und zeigt, daß hinsichtlich der so definierten Operationen  $M(t^{\Gamma})$  ein Körper ist. Bei diesem Beweis tritt wesentlich eine gewisse, induktiv definierte Teilmenge  $\theta \subset \Gamma$  ins Spiel, die zusätzlich als wohlgeordnet und von einem Ordnungstyp  $\leq \omega$  vorausgesetzt werden muß. Diese Voraussetzung bedeutet eine Einschränkung für die Wahl von  $M$  und  $G$ . Bewertet man die Potenzreihen aus  $M(t^{\Gamma})$  nach dem niedrigsten „Exponenten“, so ist wiederum  $\Gamma$  die Wertegruppe und  $\mathbb{K}$  der zugeordnete Restklassenkörper. Hinsichtlich dieser Bewertung ist  $M(t^{\Gamma})$  maximal. Verf. zeigt dies, indem er an ein Ergebnis von W. Krull anschließt und neben  $M(t^{\Gamma})$  den Potenzreihenkörper  $\mathbb{K}(x^{\Gamma}) = \left\{ \sum_{\alpha \in \Phi} H(a_{\alpha}) x^{\alpha} \right\}$  stellt. Dabei ist  $H(a)$  die im Element  $a$

mit  $w(a) \geq 0$  zugeordnete Restklasse aus  $\mathbb{K}$ . — Im zweiten Teil der Arbeit untersucht Verf. die Struktur maximaler Körper. Im Anschluß an I. Kaplansky werden folgende beiden Bedingungen mit (A) bezeichnet: 1. Ist  $\chi(\mathbb{K}) = p$ , so besitzt jede Gleichung

$$x^{p^n} + a_1 x^{p^{n-1}} + \dots + a_n x + a_{n+1} = 0$$

mit Koeffizienten aus  $\mathbb{K}$  eine Wurzel in  $\mathbb{K}$ . 2.  $\Gamma = p\Gamma$ . Im Falle  $\chi(\mathbb{K}) = 0$  ist (A) als erfüllt anzusehen. Als erstes Teilergebnis zeigt Verf.: 1. Können  $M$  und  $G$  so gewählt werden, daß die oben erwähnten Bedingungen für  $\theta$  erfüllt sind, und genügen  $\mathbb{K}$  und  $\Gamma$  der Bedingung (A), so ist  $K$  analytisch-isomorph zu einem Unterkörper von  $\bar{M}(t^{\Gamma})$ . 2. Ist  $\Gamma$  archimedisch und diskret, so gilt dasselbe. — Sei jetzt  $\Delta_i (0 \leq i \leq n)$  eine Kette von isolierten Untergruppen aus  $\Gamma$  mit  $\Delta_0 = 0$  und  $\Delta_n = \Gamma$ . Ferner  $P_i = \{a\}$  mit  $w(a) \geq 0$  und  $w(a) \notin \Delta_i$ ;  ${}^b P_i = \{a/b\}$  mit  $w(a), w(b) \geq 0$  und  $b \notin P_i$ ; schließlich  $\mathbb{K}_i = {}^b P_i / P_i$ . Dann gibt es eine Bewertung  $w_i$  von  $\mathbb{K}_i$  mit dem Restklassenkörper  $\mathbb{K}_{i-1}$  und der Wertegruppe  $\Delta_i / \Delta_{i-1}$  für  $0 < i \leq n$ . Verf. beweist dann die folgenden beiden Kriterien: 1.  $K$  sei maximal und  $\mathbb{K}, \Gamma$  sollen (A) genügen. Man setze  $\Gamma = \Delta_2$ . Ist  $\chi(K) = \chi(\mathbb{K})$ , so sei  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Ist  $\chi(K) = 0$ ,  $\chi(\mathbb{K}) = p \neq 0$ , so sei  $\Delta_1$  die von  $w(p)$  erzeugte isolierte Untergruppe.  $K = \mathbb{K}_2$  ist dann analytisch-isomorph zu  $M_2(t^{\Delta_2/\Delta_1})$  hinsichtlich  $w_2$ , und  $M_2 = \mathbb{K}_1$  ist analytisch-isomorph zu  $M_1(t^{\Delta_1/\Delta_0})$  hinsichtlich  $w_1$ . 2.  $K$  sei maximal und  $\Gamma$  diskret. Man setze  $\Gamma = \Delta_3$ . Ist  $\chi(K) = \chi(\mathbb{K})$ , so sei  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ . Ist  $\chi(K) = 0$  und  $\chi(\mathbb{K}) = p \neq 0$ , so sei  $\Delta_2$  die durch  $w(p)$  erzeugte isolierte Untergruppe und  $\Delta_1$  die größte in  $\Delta_2$  enthaltene isolierte Untergruppe.  $K = \mathbb{K}_3$  ist dann analytisch-isomorph zu  $M_3(t^{\Delta_3/\Delta_2})$  hinsichtlich  $w_3$ .  $M_3 = \mathbb{K}_2$  ist analytisch-isomorph zu  $M_2(t^{\Delta_2/\Delta_1})$  hinsichtlich  $w_2$ ,  $M_2$  ist ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{K}_1$  in  $\mathbb{K}_2$  und  $\mathbb{K}_1$  ist analytisch-isomorph zu  $M_1(t^{\Delta_1/\Delta_0})$  hinsichtlich  $w_1$ . ( $M_1 = \mathbb{K}$ ).

Kowalsky (Erlangen).

Ulm, Helmut: Konstruktion und deduktive Charakterisierung der Zahlkörper der Analysis. Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 268—272 (1950).

## Zahlkörper:

Inkeri, K.: Neue Beweise für einige Sätze zum euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. Ann. Univ. Turku., Ser. A 9, Nr. 1, 16 S. (1948).

Für gewisse Diskriminanten  $D$  wird die Nichtexistenz des E.A. (Euklidischer Algorithmus) in quadratischen Zahlkörpern  $K(\sqrt{D})$  neu bewiesen. Wohl ist die Existenz-fragedes E.A. in  $K(\sqrt{D})$  nach Davenport's Satz (Proc. London math. Soc., im Druck) und den ergänzenden Untersuchungen für  $D < 128^2$  von mehreren Autoren zum Abschluß gebracht, aber eben diese Ergänzungen sind sehr mühsam und verwickelt. Die vorliegende Arbeit ist bestrebt Vereinfachungen für  $D < 128^2$  zu erzielen. So wird der Fall  $2|D$  einheitlicher erledigt als bisher. Für den mehrmals betrachteten, interessanten Fall  $D = 61$  wird die Darstellungstheorie binärer quadratischer Formen mit gutem Erfolg herangezogen.

Rédei (Szeged).



Heilbronn, H.: On Euclid's algorithm in cubic self-conjugate fields. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 377—382 (1950).

Das Problem des E. A. (= Euklidischen Algorithmus) ist für die Zahlkörper mit höchstens einer Fundamentaleinheit (das sind die quadratischen, die nicht totalreellen kubischen, die totalkomplexen biquadratischen Zahlkörper) in dem Sinne erledigt, daß es nur endlich viele solche Körper mit E. A. gibt. Für den quadratischen Fall stammt der erste Beweis vom Verf. (dies. Zbl. 19, 292), für diesen Fall bewies neulich Davenport (Proc. London math. Soc., im Druck) sogar, daß die Diskriminante  $< 128^2$  sein muß, damit der E. A. existiert. Die genannten übrigen Resultate sind ebenfalls von Davenport (dies. Zbl. 33, 157). Verf. erledigt hier die zyklischen kubischen Zahlkörper (diese sind totalreell mit zwei Fundamentaleinheiten) mit der ähnlichen Antwort, vermutet aber, daß für die nichtzyklischen totalreellen kubischen Zahlkörper keine Endlichkeit im obigen Sinne besteht. Das Beweisverfahren weist viel Ähnliches mit dem in der zitierten Arbeit des Verf. auf. Die genannten Zahlkörper haben eine Quadratzahl  $d^2$  ( $d > 1$ ) zur Diskriminante. Wenn der E. A. gilt, also die Klassenzahl gleich 1 ist, so muß  $d = 9$  oder eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{6}$  sein. Letzteres werde nachher angenommen. Man teile die zu  $d$  primen natürlichen Zahlen in drei Klassen  $A, B, C$  ein, wovon  $A$  aus den kubischen Resten mod  $d$  besteht und  $B, C$  die zwei Potenzrestnebenklassen bezeichnen. Ferner bezeichne  $A^*$  die Teilmenge von  $A$  bestehend aus den Elementen

$$bc \quad (b \in B, c \in C, (b, c) = 1).$$

Es werden bewiesen: Lemma 1: Bezeichne  $q_1 (\neq d)$  die kleinste Primzahl außerhalb  $A$ ,  $r$  die kleinste zu  $q_1$  prime Zahl in  $A^*$ . Für  $\varepsilon (> 0)$  und genügend großes  $d$  gilt  $q_1 r < d^{1-\varepsilon}$ . Lemma 2: Jedes genügend große  $d$  hat eine Darstellung  $d = a + a'$  ( $a, a' \in A^*$ ). — Anknüpfend an Lemma 2 bezeichne  $n$  eine ganze Zahl mit  $n^3 \equiv a \pmod{d}$ . Bezeichne noch  $(\delta)$  das Hauptideal mit  $d = (\delta^3)$ . Gilt der E. A., so gibt es eine ganze Körperzahl  $\alpha$  mit  $\alpha \equiv n \pmod{\delta}$ ,  $|N(\alpha)| < |N(\delta)| = d$ . Leicht folgt  $N(\alpha) \equiv n^3 \equiv a \pmod{d}$ . Beide ergeben  $N(\alpha) = a$  oder  $-a'$ . Das ist aber wegen  $a, a' \in A^*$  unmöglich, woraus obiger Satz folgt. Rédei (Szeged).

Northcott, D. G.: Periodic points on an algebraic variety. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 167—177 (1950).

Let  $V$  be an algebraic variety in  $n$ -dimensional projective space defined by equations with algebraic coefficients. Consider a mapping  $T$ ,

$$[x] = [x_0, x_1, \dots, x_n] \rightarrow [L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)],$$

of the projective space into itself where the  $L_i(x)$  are homogeneous polynomials of dimension  $l$  with algebraic coefficients, such that (1)  $L_0(x), \dots, L_n(x)$  do not all vanish at any point of  $V$ , and (2)  $T$  maps every point of  $V$  again into a point of  $V$ . — A point  $P = [\xi] = [\xi_0, \dots, \xi_n]$  is called rational over a field  $F$  if the ratios  $\xi_i/\xi_j$  lie in  $F$ ; we may then assume that the  $\xi_i$  are already in this field. If, moreover,  $F$  is of finite degree  $(F:R) = m$  over the rational field  $R$ , then  $P$  is said to be of the degree of rationality  $m$ . Finally a point  $P$  on  $V$  is called exceptional if not all the derived points  $P, TP, T^2P, T^3P, \dots$  are distinct. The following important result is proved: „If  $l \geq 2$ , then at most a finite number of exceptional points on  $V$  are of a given degree of rationality“. — For the proof, let  $P = [\xi]$  have its coordinates in the algebraic field  $F$ . Then denote by  $\sigma$  the isomorphisms of  $F/R$  and so by  $\xi_i^\sigma$  the conjugates of  $\xi_i$ ; by  $\Omega$  the ideal sum  $(\xi_0) + (\xi_1) + \dots + (\xi_n)$ ; by  $N_{F/R}(\Omega)$  its norm; and put

$$D_F(P) = \frac{\prod_{\sigma} (|\xi_0^\sigma| + |\xi_1^\sigma| + \dots + |\xi_n^\sigma|)}{N_{F/R}(\Omega)}.$$

The following lemmas hold. Lemma 2: Let  $m$  and  $S$  be given positive integers, and let  $F$  run over all fields of degree  $(F:R) = m$  over  $R$ . Let  $\Sigma_F$  be the set of



all points  $P$  which are rational over  $F$  and satisfy  $D_F(P) \leq S$ . Then the union  $\bigcup_F \Sigma_F$  is a finite point set. — Theorem 2: There exists a positive constant  $M$  depending only on  $V$  and  $T$  with the following property: If  $P$  is any point on  $V$  of degree of rationality  $m$ , then  $D_F(P)^l \leq M^m D_F(TP)$ . This theorem contains already the assertion since all points  $P, TP, T^2P, T^3P, \dots$  become distinct if  $D_F(P) > M^{m/(l-1)}$ , and there are by lemma 2 only a finite number of points of given  $m$  not with this property. — In a final paragraph, the author generalizes his result in the case of plane curves, replacing the condition (1) for  $T$  by a less restrictive one. His proof now demands the use of A. Weil's „distributions“ [see Acta math. 52, 281—315 (1928)]. K. Mahler (Manchester).

### Zahlentheorie:

**Pekelharing, N. R.:** Die Zahl 41. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 27, 93—98 (1950) [Holländisch].

**Dueball, Fritz:** Bestimmung von Polynomen aus ihren Werten mod  $p^n$ . Math. Nachr., Berlin 3, 71—76 (1950).

Es handelt sich um eine Lösung folgender zwei Probleme: Was für Abhängigkeiten weist der Wertevorrat  $f(i) \equiv a_i \pmod{p^n}$  ( $i = 0, \dots, p^n - 1$ ) eines ganzzahligen Polynoms  $f(x)$  auf ( $p$  Primzahl), und wie läßt sich  $f(x)$  aus einem „zulässigen“ Wertevorrat  $a_i$  konstruieren. In einer inzwischen erschienenen Arbeit [L. Rédei und T. Szele, Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe II. Acta math., København 82, 209—241 (1950), s. Satz 10 und seinen Beweis im § 16] wurden beide Probleme sogar für einen beliebigen Modul  $m$  (statt  $p^n$ ) auf eine leichtere Art erledigt. Verf. beantwortet auch noch eine Reihe ebenfalls interessanter Nebenfragen. So z. B.:  $f(x) \pmod{p^n}$  ist schon aus den Werten für  $x = 0, \dots, \gamma p - 1$  eindeutig bestimmt, wobei  $\gamma$  die kleinste ganze Zahl bezeichnet, für die  $p^n | p^\gamma \gamma!$  gilt. Diese Bedingung ist identisch mit  $m | i!$  ( $m = p^n, i = p^\gamma$ ), woraus man sieht, daß auch dieses Resultat im Satz 10 der zitierten Arbeit von Rédei und Szele als Spezialfall enthalten ist. Zwei an sich bemerkenswerte (obwohl fast triviale) Hilfssätze: Ist  $f(x)$  vom Grade  $\leq p - 1$  für  $x = 0, \dots, p - 1$  teilbar durch  $p^n$ , so verschwindet es mod  $p^n$  identisch. Es gibt mod  $p^n$  genau ein Polynom vom Grade  $\leq p - 1$ , das an  $0, \dots, p - 1$  beliebig vorgeschriebene Werte mod  $p^n$  hat. Rédei (Szeged).

**Nagell, Trygve:** Sur les restes et les non-restes quadratiques suivant un module premier. Ark. Mat., Stockholm 1, Nr. 16, 185—193 (1950).

Bezeichne  $p$  eine ungerade Primzahl,  $\pi$  und  $\psi$  die kleinste ungerade Primzahl mit  $\left(\frac{\pi}{p}\right) = 1$  bzw.  $\left(\frac{\psi}{p}\right) = -1$ . Es werden die oberen Abschätzungen bewiesen:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\pi < \sqrt{p}$                        | ( $p \equiv 1 \pmod{4}$ , $p > 17$ ),                        |
| 2) $\pi < 2\sqrt{p-1}$                     | ( $p \equiv 7 \pmod{8}$ , $p > 7$ ),                         |
| 3) $\pi \leq \sqrt{\frac{1}{2}(p+16)} - 2$ | ( $p \equiv 3 \pmod{8}$ , $p \neq 3, 11, 19, 43, 67, 163$ ), |
| 4) $\psi < \sqrt{p}$                       | ( $p \equiv 1 \pmod{8}$ ),                                   |
| 5) $\psi < \sqrt{2p}$                      | ( $p \equiv 5 \pmod{8}$ ),                                   |
| 6) $\psi < \sqrt{2p-1}$                    | ( $p \equiv 7 \pmod{8}$ , $p > 7$ ),                         |
| 7) $\psi < 2\sqrt{p+1}$                    | ( $p \equiv 3 \pmod{8}$ , $p > 3$ ),                         |

wovon aber 3) höchstens für ein  $p$  ( $> 10^7$ ) falsch sein kann, außerdem gilt neben 6) die Abschätzung

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| 8) $\psi < 2\sqrt{p-1}$ | ( $p \equiv 7 \pmod{8}$ ), |
|-------------------------|----------------------------|



wenn  $\psi$  der weiteren Einschränkung  $\psi \equiv 3 \pmod{4}$  unterworfen wird. Die Beweise von 1)–8) sind sehr verschiedenartig und benutzen außer ganz leichten Überlegungen den Satz von Thue über die Lösbarkeit von  $ay \equiv \pm x \pmod{p}$  ( $1 \leq x, y < \sqrt{p}$ ) für  $p \nmid a$  in ganzen  $x, y$ , nur zu 3) wird ein früherer Satz des Verf. [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 1, 140–150 (1922), Satz VII] und der bekannte Satz von H. Heilbronn über die imaginär-quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 benutzt.

Rédei (Szeged).

**Nagell, Trygve:** Über die Darstellung ganzer Zahlen durch eine indefinite binäre quadratische Form. Arch. Math., Karlsruhe 2, 161–165 (1950).

It is shown that there is an automorphism of the form  $x^2 - Dy^2$  which carries any given solution  $u, v$  of  $u^2 - Dv^2 = C$  into a solution  $u^*, v^*$  where  $u^*, v^*$  have bounds depending only on  $C, D$  and the basic solution of  $u^2 - Dv^2 = 1$ . This was substantially known to Tehebisceff [J. Math. pur. appl. 16, 257–282 (1851)]. It is deduced that all solutions of  $u^2 - Dv^2 = \pm p$  ( $p$  prime) can be obtained by automorphisms from one or two basic solutions according as  $p|2D$  or  $p \nmid 2D$ .

Cassels (Cambridge).

**Jacobsthal, Ernst:** Beiträge zur Zahlentheorie. I. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 30, 137–142 (1950).

Über die Anzahl  $A(a, x)$  der kleinsten positiven Reste von  $km \pmod{n}$  mit  $(m, n) = 1$ ,  $k = 1, \dots, a$ , die  $\geq x$  sind, bzw. über die Anzahl  $B(a, x)$  der Reste  $> x$  gibt Verf. einige Sätze. Sie gipfeln in

$$B(a, x) = A(a, x) - [(x_1 + a)/n].$$

Hierbei bedeutet die Klammer das größte Ganze,  $x_1$  ist die kleinste positive Lösung der Kongruenz  $-x_1 m \equiv x \pmod{n}$ .

Holzer (Graz).

**Jacobsthal, Ernst:** Beiträge zur Zahlentheorie. II. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 31, 143–148 (1950).

Verf. entwickelt für  $D = A(a, y) - B(a, x)$  mit  $t$  als kleinster positiver Lösung von  $tm = x - y \pmod{n}$ ,  $q_k$  durch  $km = nq_k + r_k$  bestimmt und  $b = r_a$ , die Formel:  $D = tq_a - aq_t + b \cdot [(x_1 + t)/n] + [(x_1 + a)/n] + T$ . Hierbei ist  $||x|| = \operatorname{sgn}[x]$ , und  $T$  findet sich als  $T = \operatorname{sgn}(n - x_1 - t) \sum_{h=1}^{n-1} \{ (r_a + r_b) / \{x + n||r_h/x||\} \}$ , wo die Summe bei  $\operatorname{sgn} = +1$  über  $1 \leq h \leq t$ , bei  $\operatorname{sgn} = -1$  über  $t+1 \leq h \leq n$  zu erstrecken ist.

Holzer (Graz).

**Jacobsthal, Ernst:** Beiträge zur Zahlentheorie. III. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 32, 149–153 (1950).

Verf. zeigt, wie sich für  $t = 1, n-1$ ;  $t = 2, n-2$  die in II (s. vorsteh. Referat) gegebene Formel vereinfacht.

Holzer (Graz).

**Jacobsthal, Ernst:** Beiträge zur Zahlentheorie. IV. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 33, 154–158 (1950).

Die eckige Klammer bedeute durchwegs das größte Ganze. — Verf. bespricht, etwas vom Thema abschweifend, verschiedene Formeln, die Verallgemeinerungen der bekannten Formel  $\sum_{k=0}^{n-1} [km/n] = (m-1)(n-1)/2$  sind. Es ergibt sich unter anderem: Für  $(m, n) = 1$  ist:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{[n/r]} [km/n] + \sum_{k=0}^{[m/r]} [kn/m] = [m/r] \cdot [n/r] + [1/r].$$

Hier ist  $r$  eine beliebige positive Zahl. — (2) Ist überdies  $1 < m < n$ ,  $m' = [(m-1)/2]$ ,  $n' = [(n-1)/2]$ , so gilt für  $n \equiv 0 \pmod{2}$   $\sum_{k=0}^{n'} [km/n] < \sum_{k=0}^{m'} [kn/m]$ . Hier ist für  $n$  ungerade,  $m \equiv 1 \pmod{2}$  das Zeichen  $<$  durch  $\leq$ , für  $m \equiv 0 \pmod{2}$  durch  $\geq$  zu ersetzen.

Holzer (Graz).



- Jacobsthal, Ernst: Über absolut multiplikative zahlentheoretische Funktionen. I. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 12, 42—46 (1950).  
 Jacobsthal, Ernst: Über absolut multiplikative zahlentheoretische Funktionen. II. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 13, 47—50 (1950).  
 Jacobsthal, Ernst: Über einen Satz von Leudesdorf. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 41, 193—197 (1950).

Eine (zahlentheoretische) Funktion  $f(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit  $f(mn) = f(m)f(n)$  wird absolut multiplikativ genannt. Dann ergibt sich für die Summen

$$F(n) = \sum_{k=1}^n f(k), \quad \Psi(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k, n)=1}}^n f(k)$$

mit einer leichten Anwendung der Möbiusschen Umkehrformel:

$$\frac{\Psi(n)}{f(n)} = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{F(d)}{f(d)}, \quad \text{d. h.} \quad \Psi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

Diese bemerkenswerte Formel wird auf den Fall  $f(n) = n^r$  angewendet ( $r = 1, 2, \dots$ ). Dann ist  $\Psi(n) = s_r$  die Summe der  $r$ -ten Potenzen der zu  $n$  primen natürlichen Zahlen  $a_1, \dots, a_t$  ( $\leq n$ ,  $t = \varphi(n)$ ). Es ergibt sich

$$s_r = \sum_{k=0}^{[r/2]} \frac{1}{r+1} \binom{r+1}{2k} B_{2k} n^{r+1-2k} C_{2k-1}(n) \quad (n > 1),$$

wobei  $B_k$  die  $k$ -te Bernoullische Zahl und  $C_k = \prod_{p|n} (1 - p^k)$  ( $p$  Primzahl) ist.

Hieraus entsteht die Kongruenz

$$s_r \equiv 0 \left( \text{mod } \frac{n^{\varepsilon_r} D}{N_r} \right) \quad \left( n > 1, r > 1; \varepsilon_r = \begin{cases} 1 & (2|r) \\ 2 & (2 \nmid r) \end{cases} \right),$$

wobei  $N_r$  der Generalnenner von  $\frac{1}{r+1} \binom{r+1}{2k} B_{2k}$  ( $k = 0, \dots, [\frac{r}{2}]$ ) und  $D$  ein gewisser Teiler von  $N_r$  ist, für dessen genauen Wert auf die Arbeit verwiesen sei. Nach dem Satz von Staudt-Clausen besteht  $N_r$  nur aus solchen Primzahlen  $q$ , für die  $q-1$  ein Teiler von  $2, 4, 6, \dots, 2[r/2]$  ist. Für kleine Werte von  $r$  lassen sich  $N_r$  und  $D$  näher angeben. Die Beispiele  $r = 1, 2, 3, 4$  werden berechnet ( $n > 1$ ):

$$s_1 = \frac{n \varphi(n)}{2}, \quad s_2 = \frac{n}{6} (2n \varphi(n) + \Pi_1) \quad \left( \Pi_1 = \prod_{p|n} (1-p) \right),$$

$$s_3 = \frac{n^2}{4} (n \varphi(n) + \Pi_1), \quad s_4 = \frac{n}{30} (6n^3 \varphi(n) + 10n^2 \Pi_1 - \Pi_2) \quad \left( \Pi_2 = \prod_{p|n} (1-p^3) \right).$$

Für  $S_1 = \sum_{k=1}^t 1/a_k$  gilt nach Leudesdorf [Proc. London Math. Soc. 20, 199—212 (1889)]

$$S_1 \equiv 0 \pmod{n^2/4} \text{ für } n = 2^c, \equiv 0 \pmod{n^2/(n, 6)} \text{ für } n \neq 2^c.$$

Als weitere Anwendung gibt Verf.  $S_1 \pmod{n^2}$  auf Grund von  $S_1 \equiv -s_2 n/2 \pmod{n^2}$  ( $n \geq 3$ ) genau an:

$$S_1 \equiv -n^2/4 \text{ für } n = 2^c, c \geq 2; \equiv 2n^2/3 \text{ für } n = 3^d;$$

$$\equiv -n^2/6 \text{ für } n = 2^c 3^d; \equiv n^2/2 \text{ für } n = 2^c p^d, p \equiv 3 \pmod{4}, p > 3;$$

$$\equiv (-1)^k n^2/3 \text{ für } n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}, 3|n, k \geq 2, p_1, \dots, p_k \not\equiv 1 \pmod{3},$$

wobei alle Exponenten positiv und  $p_1, \dots, p_k$  verschiedene Primzahlen sind. In den übrigen Fällen gilt  $S_1 \equiv 0 \pmod{n^2}$ . Nach Verf. wird S. Selberg einen Beweis dafür veröffentlichen, daß fast immer der letztgenannte Fall eintritt. Rédei.

Mikolás, Miklós: A remark concerning primitive roots of unity. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 27, 124—127 (1950).

Es sei  $F_n(z) = \prod_{k \leq n, (k, n)=1} (z - e^{2\pi i k/n})$ , dann ist bekanntlich  $F_n(1) = p$ , wenn



$n$  eine Primzahlpotenz  $p^j$  ist. Der Verf. gibt folgenden allgemeinen Satz: Es sei  $n \neq 1$ ,  $k, v$  zwei Zahlen,  $(k, v) = 1$ ,  $A$  der größte Teiler von  $n$ , welcher prim zu  $v$  ist, dann ist

$$|F_n(e^{2\pi i k/v})| = T(n, v) \prod_{d|n, v \nmid d} \left| \sin \frac{d k \pi}{v} \right|^{\mu(n/d)}$$

( $\mu$  Möbiusfunktion), wo  $T(n, v) \leq p$ , wenn  $v|n$ ,  $A = 1$ ,  $(v, n/v) = \text{Primzahlpotenz } p^j$ ;  $T(n, v) = 2$ , wenn  $v|n$ ,  $(v, n/v) = 1$ ,  $A = \text{Primzahlpotenz } q^j$ ;  $T(n, v) = 1$  sonst ist.

Hlawka (Wien).

Veque, J. Le: On the size of certain number-theoretic functions. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 440—463 (1949).

Erdős und Kac [Amer. J. Math. **62**, 738—742 (1940); dies. Zbl. **24**, 102] bewiesen den Satz: Die Anzahl der natürlichen Zahlen  $m \leq n$ , für die  $f(m) < A_n + \omega B_n$  ist, wird für  $n \rightarrow \infty$  gegeben durch  $n D(\omega) + o(n)$ ; dabei bedeutet  $f(m)$  eine additiv zahlentheoretische Funktion mit der Eigenschaft  $f(mn) = f(m) + f(n)$  für natürliche Zahlen  $m, n$  und  $f(p^n) = f(p)$ , sowie  $|f(p)| < 1$  für Primzahlen  $p$ , ferner ist

$$A_n = \sum_{p \leq n} f(p)/p, \quad B_n = \left( \sum_{p \leq n} f^2(p)/p \right)^{\frac{1}{2}}, \quad D = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-x^2/2} dx.$$

Verf. beweist eine Reihe verwandter Abschätzungen, nämlich für die Anzahl  $v(m)$  der verschiedenen Primteiler und die Anzahl  $d(m)$  der Teiler von  $m$ : Die Anzahl der natürlichen Zahlen  $m \leq n$ , welche den Ungleichungen

$$v(m) < \log_2 n + \omega(\log_2 n)^{\frac{1}{2}} = E(\omega, n) \quad \text{bzw.} \quad d(m) < 2^{E(\omega, n)}$$

genügen, ist für  $n \rightarrow \infty$  gegeben durch  $n D(\omega) + o(n \log_3 n / (\log_2 n)^{\frac{1}{2}})$ ; dabei bedeutet  $\log_p n$  den  $p$ -fach iterierten Logarithmus. Weiterhin wird für die Anzahl  $t_n(\omega)$  der natürlichen Zahlen  $m \leq n$  mit  $v(m) < v(m+1) + \omega(2 \log_2 n)^{\frac{1}{2}}$  die Abschätzung  $t_n(\omega) = n D(\omega) + o(n)$  angegeben. Schließlich wird unter der weiteren Bedingung  $\sum_p f^2(p)/p = \infty$  für  $f(p)$  für die Anzahl der natürlichen Zahlen

$m \leq n$ , welche gleichzeitig den Ungleichungen  $f(m) < A_n + \omega_1 B_n$  und  $f(m+1) < A_n + \omega_2 B_n$  genügen,  $n D(\omega_1) D(\omega_2) + o(n)$  hergeleitet. Heinholt.

Kac, M.: Probability methods in some problems of analysis and number theory. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 641—665 (1949).

Ein zusammenfassender Bericht, gegeben auf der Tagung der Amer. math. Soc. in Columbus, Ohio, 1948. Der erste Teil des Berichtes bringt Ergebnisse über Lückenreihen (gap series), der zweite Teil befaßt sich mit Verteilungen von additiven zahlentheoretischen Funktionen. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis ist beigegeben.

Heinholt (München).

Linnik, Ju. V.: Eine Bemerkung über das Produkt von drei Primzahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **72**, 9—10 (1950) [Russisch].

It is proved in this note that for large  $x$  the interval  $[x, x + x^{\frac{1}{2}} M]$ , where  $M = e^{(\log x)^{0.99}}$ , contains an integer which is the product of three prime numbers.

K. Mahler (Manchester).

Mardžanišvili, K. K.: Untersuchungen zur Anwendung trigonometrischer Summen auf additive Probleme. (Auszug aus einer Dissertation). Uspechi mat. Nauk **5**, Nr. 1 (35), 236—240 (1950) [Russisch].

This abstract gives a short account of the author's work on additive prime number problems: e. g. he has obtained an asymptotic formula for the number of solutions in primes  $p_1, p_2, \dots, p_s$  of the pair of equations

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s = N_1, \quad p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2 = N_2$$

$s$  being  $\geq 7$ , and more general results of a similar type. K. Mahler (Manchester).

Vinogradov, I. M.: Die obere Grenze des Betrages einer trigonometrischen Summe. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **14**, 199—214 (1950) [Russisch].



Let  $n \geq 11$  be an integer,  $f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_1x$  and

$$S = \sum_{x=1}^p \exp \{2\pi i m f(x)\}$$

where  $p, m$  are integers. Let  $a_r = a/q + \theta/q^2$ ,  $(q, a) = 1$ ,  $1 < q < p^r$  for some integer  $r$ ,  $2 \leq r \leq n+1$ , where  $a, q$  are integers. Define  $\tau$  by  $q = p^\tau$  if  $1 < q \leq p$ ,  $\tau = 1$  if  $p < q \leq p^{r-1}$ ,  $q = p^{r-\tau}$  if  $p^{r-1} < q < p^r$  and put  $l = \log 12n(n+1)/\tau$ ,  $\varrho = \tau/3n^2l$ . Then

$$(1) \quad |S| < (8n)^{\frac{1}{2}nl} m^{2e/\tau} p^{1-e}.$$

— Compare the author's earlier estimate  $|S| < c(n) m^{2e/\tau} p^{1-et}$  where  $t = 1 + 1/30n$  and  $c(n)$  is an unspecified function of  $n$  (this Zbl. 33, 251). The two proofs run similarly. It is stated that (1) can be further improved by a more complicated argument.

Cassels (Cambridge).

**Rankin, R. A.:** The difference between consecutive prime numbers. IV. Proc. Amer. math. Soc. 1, 143—150 (1950).

Es sei  $\{p_n\}$  die Folge der Primzahlen,  $\theta = \inf \sigma_0$  der Zahlen  $\sigma_0 > 0$ , für welche kein  $L(s, \chi)$  eine Nullstelle in  $s = \sigma + it$  für  $\sigma > \sigma_0$  hat. Weiter sei  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n)/\log p_n$ . Dann wird gezeigt, in Fortsetzung und teilweiser Verschärfung der Resultate des Verf. in II (dies. Zbl. 25, 307) und III [J. London math. Soc. 22, 226—230 (1947)]:  $l \leq c(1 + 4\theta)/5$ , wo  $c$  eine Konstante  $= 0,97667 \dots < 42/43$  ist. Gilt die erweiterte Riemannsche Vermutung, so folgt daraus  $l < 0,58602 \dots$ .

Hlawka (Wien).

**Gentile, Giovanni:** Numeri primi in un intervallo particolare. Periodico Mat., IV. S. 28, 130 (1950).

**Selberg, Atle:** An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 297—304 (1949).

**Selberg, Atle:** An elementary proof of the prime-number theorem. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 305—313 (1949).

**Selberg, Atle:** An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions. Canadian J. Math. 2, 66—78 (1950).

Es werden ganz neue elementare Beweise für die folgenden grundlegenden Sätze der analytischen Zahlentheorie gegeben: I. Jede prime Restklasse  $l \bmod k$  enthält unendlich viele Primzahlen (Dirichlet). II. Die Anzahl  $\pi(x)$  der Primzahlen  $\leq x$  ist asymptotisch  $x: \log x$  (Hadamard-De la Vallée Poussin). III. Eine prime Restklasse  $\bmod k$  enthält bis  $x$  asymptotisch  $x: \varphi(k) \log x$  Primzahlen. — Unter Verwendung bekannter elementarer Abschätzungen, wie z. B.

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = O(x), \quad \sum_{p \leq x} p^{-1} \log p = \log x + O(1)$$

wird die im Mittelpunkt der Betrachtungen stehende neue Abschätzung hergeleitet:

$$\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{p, q \leq x} \log p \log q = 2x \log x + O(x),$$

die dann durch mehrfache Anwendung partieller Summation umgeformt wird in

$$|\vartheta(x) - x| = |R(x)| \leq \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

Hieraus wird geschlossen: Für beliebiges  $x > e^{K_1/\delta}$  enthält das Intervall  $(x, e^{K_2/\delta} x)$  stets ein Teilintervall  $(y, e^\delta y)$ , in welchem  $|R(z)| < \delta z$  gilt. Beide Abschätzungen von  $R(x)$  ergeben nun zusammen ein Iterationsverfahren, das mit der Feststellung  $R(x) = o(x)$  endet. Das ist bereits im wesentlichen der Primzahlatz II. — Ein modifizierter Beweis ergibt das analoge Resultat für eine prime Restklasse  $\bmod k$ . Dabei wird der Fall reeller Charaktere in Anlehnung an Dirichlet behandelt. Durch eine besondere Methode gelingt es, die sonst üblichen komplexen Charaktere als „less elementary“ ganz zu vermeiden. — Der hier vorkommende Begriff „ele-



mentar“ ist so zu verstehen: Benutzt werden nur rationale Funktionen, abgesehen von  $e^x$  und  $\log x$  für reelle Zahlen (im klassischen Weierstraßschen Sinn). — Den Begriff „elementar“ kann man auch in ganz anderer Weise so auslegen, daß eine finite Aussage finit (konstruktiv) bewiesen werden soll. Wie L. E. J. Brouwer gezeigt hat, muß man dann auf das Axiom „tertium non datur“ der formalistischen Logik verzichten. Ref. hat selbst vor einiger Zeit nachgeprüft, daß man alle bisherigen Beweise für den Primzahlsatz (bzw. Primidealsatz) auf einfache Weise in diesem Sinn modifizieren kann, wie dies im Falle 1 schon Mertens und Kronecker getan haben (neuerdings auch Zassenhaus). *Ernst Witt* (Hamburg).

**Shapiro, Harold N.:** An elementary proof of the prime ideal theorem. Commun. pure appl. Math., New York **2**, 309—323 (1949).

Die neue „elementare“ Methode von A. Selberg (s. obiges Referat) wird angewendet zum Beweis des Primidealsatzes  $\pi(x) \sim x: \log x$  in der Form  $R(x) = o(x)$  für einen Zahlkörper  $K$ . Dabei bedeutet in üblicher Weise

$$\pi(x) = \sum_{N \mathfrak{p} \leq x} 1, \quad \vartheta(x) = \sum_{N \mathfrak{p} \leq x} \log N \mathfrak{p} = x + R(x),$$

ausgehend vom Satz der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primideale und der Anzahlformel  $\alpha x + O(x^{1-(1/k)})$  für Ideale mit Norm  $\leq x$ , wird wieder die grundlegende Abschätzung

$$\sum_{N \mathfrak{p} \leq x} \log^2 N \mathfrak{p} + \sum_{N \mathfrak{p} \mathfrak{q} \leq x} \log N \mathfrak{p} \log N \mathfrak{q} = 2x \log x + O(x)$$

bewiesen. Dies wird umgeformt in

$$|R(x)| \leq \frac{2}{\log^2 x} \sum_{n \leq x} \left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| \log n + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Hieraus folgt das gesuchte Resultat  $R(x) = o(x)$  „in much the same way as Selberg“. *Ernst Witt* (Hamburg).

**Bateman, P. T., S. Chowla and P. Erdős:** Remarks on the size of  $L(1, \chi)$ . Publ. Math., Debrecen **1**, 165—182 (1950).

Es sei  $\chi$  ein Restcharakter mod  $k$  ( $\neq$  Hauptcharakter), dann wird  $L(1, \chi)$  betrachtet. Es ist bekannt:  $|L(1, \chi)| < \log k$ . Die Verff. zeigen (Satz 2): Es ist

$$|L(1, \chi)| < \frac{10}{3} \frac{\varphi(k)}{k} \log k + 1 \quad \text{und für großes } k, \quad < \frac{7}{4} \frac{\varphi(k)}{k} \log k.$$

Dies ist eine Verschärfung, wenn  $k$  viele verschiedene kleine Primfaktoren enthält. Beim Beweis wird von dem Satz von Mertens, dem Primzahlsatz und den Resultaten von Rosser (dies. Zbl. **19**, 394; **24**, 250) Gebrauch gemacht. — Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit einer Vertiefung der Untersuchungen von Chowla (dies. Zbl. **32**, 110). Es werden jetzt nur reelle primitive Charaktere  $\chi(n) = (d/n)$  (Kronecker-Symbol,  $d$  Fundamentaldiskriminante) betrachtet. Ist  $k = q \equiv 1(4)$ , ( $q$  Primzahl), dann ist  $d = q$ , ist  $q \equiv -1(4)$ , dann ist  $d = -q$ . Es gilt für  $L(1, \chi) = L_d(1)$ : (Satz 1): Durchläuft  $q$  alle Primzahlen  $\equiv 1(4)$  bzw.  $\equiv -1(4)$ , dann ist

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \frac{L_d(1)}{\log \log q} \geq \frac{1}{18} e^C, \quad \underline{\lim}_{q \rightarrow \infty} (\log \log q) L_d(1) \leq \frac{18}{6} \pi^2 e^{-C}$$

( $C$  Eulersche Konstante). In beiden Fällen ist  $L_d(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n/q) 1/n$ . Aus diesem

Satz kann gefolgert werden:  $\max_{n=1}^m (n/q) = \Omega_R(q^{\frac{1}{2}} \log \log q)$ , was bereits früher von Chowla (dies. Zbl. **6**, 254; **9**, 253) unter Verwendung der erweiterten Riemannschen Vermutung gezeigt wurde. Der Beweis von Satz 1 ist sehr kompliziert. Benutzt wird die Arbeit von Page (dies. Zbl. **11**, 149) über Primzahlen in arithmetischen Reihen und ein Lemma von A. Rényi (dies. Zbl. **33**, 162). Um z. B. den ersten Teil des Satzes (etwa für  $q \equiv 1(4)$ ) zu zeigen, wird eine Menge  $\gamma = \gamma(x)$  von solchen



Primzahlen, welche  $\leq x$  sind, konstruiert (für ihre Definition sei auf die Arbeit verwiesen), für die gezeigt wird:

$$\sum_{q \in \gamma} \log L_q(1) \geq S \log \log \log x + S(C - \log 18) + o(S) \quad (x \rightarrow \infty),$$

wo  $S$  die Anzahl der Primzahlen in  $\gamma$  ist. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei in der Abschätzung von  $R = \sum_{q \in \gamma} \sum_{p > y} (p/q) 1/p$ , wo das Lemma von Rényi eine wichtige Rolle spielt.

Hlawka (Wien).

Prasad, A. V.: Simultaneous diophantine approximation. Proc. Indian Acad. Sci. A 31, 1—15 (1950).

By Minkowski's theorem on convex bodies, there exists a positive constant  $C_n$  with the following property: If  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  are any  $n$  real irrationals, then there are sets of integers  $u_0, u_1, \dots, u_n$  with  $u_0$  arbitrarily large such that

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (u_0 \theta_r - u_r)^2 \leq \left| \frac{C_n}{u_0} \right|^{2/n}.$$

The author deduces from Blichfeldt's upper bound [Trans. Amer. math. Soc. 15, 227—235 (1914)] for the minimum of a quadratic form that  $C_n$  may be taken as

$$C'_n = \Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right) \left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)^{-(n+1)/2} \sim \frac{n^{3/2}}{2e^{1/2}(\pi e)^{n/2}} \text{ for large } n.$$

By applying Blichfeldt's method directly, he obtains for  $C_n$  the better upper bound

$$C''_n = \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) \left(\frac{\pi(n+2a)}{2}\right)^{-n/2} \left(1 - \frac{9(\log n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \sim \frac{n^{3/2} \pi^{1/2}}{2e^a (\pi e)^{n/2}} \text{ for large } n,$$

where

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \log k}{(k+1)(k+2)} = 1,204 \dots$$

To this end, he proves the following result which is of interest in itself: Suppose that  $n > 10^7$  and that  $X$  is a sufficiently large positive number; denote by  $K_n^{(X)}$  the  $(n+1)$ -dimensional star body defined by

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n x_r^2 \max(|x_0|^{2/n}, X^{-2}) \leq 1, |x_0| \leq 1.$$

Then, in Mahler's notation [Proc. R. Soc., London, A 187, 151—187 (1946)],

$$\Delta(K_n^{(X)}) \geq (C'_n)^{-1}.$$

K. Mahler (Manchester).

Hlawka, Edmund: Über Folgen von Quadratwurzeln komplexer Zahlen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 255—262 (1948).

The author proves the following theorems: (1) Let  $\xi$  be a complex number which is neither in  $k(i)$  nor is an integer in any quadratic extension of  $k(i)$ . For every  $\varepsilon > 0$  there exist a unit  $e$  ( $= \pm 1, \pm i$ ) and infinitely many integers  $z \neq 0$  in  $k(i)$  such that

$$|\xi - e\sqrt{z}| < \frac{1+\varepsilon}{4|z|} \pmod{(1, i)}.$$

Here  $\sqrt{z}$  may be assumed to lie in the first quadrant of the Gaussian plane. (2) Let  $\theta$  and  $\eta$  be two complex numbers of which  $\theta$  is not in  $k(i)$ . For every  $\varepsilon > 0$  there exist infinitely many pairs of integers  $x, y$  in  $k(i)$  such that  $x \neq 0$  lies in the first quadrant of the Gaussian plane and tends to infinity, and that  $|\theta x - y - \eta| \leq \frac{C+\varepsilon}{|x|}$ .

Here one may take  $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[1 + \sqrt[2]{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \sim 2,89$ . (3) Let  $\varepsilon > 0$ . For every  $\xi$  not in  $k(i)$  there are infinitely many integers  $z \neq 0$  of  $k(i)$  in the first



quadrant such that  $|\xi - \sqrt{z}| < \frac{C + \varepsilon}{2|z|} \pmod{(1, i)}$  with the same  $C$  as in (2).  
 (4) Let  $\xi$  be an element of  $k(i)$ . There exists a positive number  $C(\xi)$  such that for every integer  $z \neq 0$  of  $k(i)$  in the first quadrant either  $|\xi - \sqrt{z}| > \frac{C(\xi)}{|z|} \pmod{(1, i)}$ , or  $\xi - \sqrt{z} \equiv 0 \pmod{(1, i)}$ . For the results (1), (3) and (4) compare the notes by K. Mahler [Nieuw Arch. Wiskunde. **20**, 176—178 (1940); this Zbl. **22**, 309] and J. F. Koksma [loc. cit. 179—183; this Zbl. **22**, 309] where the corresponding real theorems are proved.  
*K. Mahler (Manchester).*

**Hlawka, Edmund:** Über Gitterpunkte in Parallelepipeden. J. reine angew. Math. **187**, 246—252 (1950).

Let „lattice point“ mean a point with integer co-ordinates in  $n$ -dimensional euclidean space. Let  $V > 0$  and  $n$  linearly independent vectors  $a_1, \dots, a_n$  be given. Then it is proved that there is a parallelepiped  $P$  with centre  $O$  (the origin), volume  $V$  and face-normals  $a_1, \dots, a_n$  which contains at most  $A_n V$  pairs of lattice points  $\pm g \neq O$  where  $A_n = n^{-1}(n!)^2 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ . In particular if  $V < A_n^{-1} = B_n$  then  $P$  contains no lattice point except the origin. This proves a conjecture of Mordell [J. London math. Soc. **12**, 34—36 (1937); this Zbl. **15**, 390]. Previously the existence of a  $B_n$  with the latter property was known only for  $n = 2, 3$  but here earlier results are stronger [Székereš, *ibid.* 36—39, 88—93; Chao Ko, *ibid.* 40—47; this Zbl. **15**, 391; **16**, 368]. There is a generalisation to arbitrary convex bodies. The following lemma is used: Let  $K$  be a convex body with centre  $O$  and volume  $V$  containing a set  $\mathfrak{M}$  of  $k \geq n$  points. Let  $\mathfrak{M}$  not lie in a linear subspace through  $O$  and suppose that if  $x \in \mathfrak{M}$ ,  $\lambda x \in \mathfrak{M}$  ( $\lambda > 1$ ) then  $(\lambda - 1)x \in \mathfrak{M}$ . Then

$$V \geq (k - n + 1)(n!)^{-1} \text{Min} |\text{Det}(x_1, \dots, x_n)|$$

where the minimum is over all linearly independent  $n$ -tuples in  $\mathfrak{M}$ . This generalises a result of Blichfeld [Bull. Amer. math. Soc. **27**, 150—153 (1921)]. There is also a generalisation of Minkowski's theorem on successive minima: If  $f(x)$  is a convex distance function and  $l > 0$  is an integer, define  $M_{li}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) as the upper bound of the  $q$  such that  $f(x) < q$  contains either less than  $l$  pairs of lattice points  $\pm g \neq O$  or less than  $i$  linearly independent lattice points. Then

$$l!n! < J M_{l1} M_{l2} \dots M_{ln} \leq 2^n l$$

where  $J$  is the volume of  $f(x) < 1$ .

*Cassels (Cambridge).*

**Hlawka, Edmund:** Über Integrale auf konvexen Körpern. I, II. Mh. Math., Wien **54**, 1—36, 81—99 (1950).

**Hlawka, Edmund:** Über die Zetafunktion konvexer Körper. Mh. Math., Wien **54**, 100—107 (1950).

In  $m$ -dimensional space  $R_m$  ( $m \geq 2$ ),  $O = (0, 0, \dots, 0)$  is the origin,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ , etc., are arbitrary points, and  $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $lx = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m$  are the length of  $x$  and the inner product of  $l$  and  $x$ . Let  $B: f(x) \leq 1$  be a convex body containing  $O$  as an inner point,  $f(x)$  its distance function and  $H(u)$  its tac-function (Stütz-funktion). Denote by  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_m$  the volume element, so that  $J = \int_B dx$  is the volume of  $B$ , further by  $do$  and  $d\sigma$  the surface elements on the boundary  $S(B): f(x) = 1$  of  $B$ , and on that of the unit sphere  $\Sigma: |u| = 1$ , respectively. By means of parallel tac-planes (Stützebenen) on the same side of  $O$ , a one-to-one mapping of  $S(B)$  on  $\Sigma$  is obtained. Suppose it changes the element  $do$  at  $x$  on  $S(B)$  into the element  $d\sigma$  at the corresponding point on  $\Sigma$ ; then  $do/d\sigma = K$  is the total curvature of  $S(B)$  at  $x$ . — In (I), the author assumes that  $f(x)$  and  $H(u)$  are  $6m$  times differentiable outside  $O$ , and that  $K$  has a positive lower bound on  $S(B)$ . Then, using either Laplace's method, or van der Corput's method of the



stationary phase (this Zbl. 30, 246), he constructs asymptotic formulae for integrals like  $G(l) = \int_B e^{ilx} dx$ ,  $G_1(l) = \int_B (m + ilx) e^{ilx} dx$ ,  $I_\delta = \int_{f(x) \leq t} (t^2 - f(x)^2)^\delta e^{ilx} dx$  ( $\delta \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ) under the assumption that  $|l| \rightarrow \infty$ . These very general developments contain many results by other mathematicians as special cases. He applies his formulae to the study of the number of lattice points in a convex body. — In (II),  $S(B)$  is assumed  $6(m+2)$  times differentiable, while its tangential planes have a contact of the first order. If  $B$  is symmetrical in  $O$ , then the zeros of  $G(l)$ , except a finite number, form infinitely many convex surfaces  $L_k$  with centre at  $O$ , and these tend asymptotically to the surfaces  $H(l) = (m+1)\pi/4 + (2k+1)\pi/2$  when  $k$  runs over the positive integers. If  $B$  has no centre, then there are infinitely many zeros only on a finite number of radii from  $O$ . In two dimensions,  $G(l)$  vanishes then, and only then, on infinitely many curves of the form  $H(l) = \text{const.}$ , if  $B$  is an ellipse. — Finally the surfaces on which  $|G(l)|$  is an extremum, are discussed. — In the last paper (III),  $S(B)$  is assumed analytical and of simple contact with all its tangential planes. Denote by  $A$  a matrix of unit determinant, and put  $Z(s) = \sum_g \frac{1}{f(Ag)^{2s}}$  where the summation extends over all points  $g \neq O$  with integral coordinates. The author proves that  $Z(s)$  is analytic in the whole  $s$ -plane, has a simple pole of residue  $mJ/2$  at  $s = m/2$ , and vanishes at  $-1, -2, \dots$ . This is deduced from a representation of  $Z(s)$  as an infinite series of integrals. In the special case when  $B$  is an ellipsoid symmetrical in  $O$ ,  $Z(s)$  becomes Epstein's zeta function, and the development becomes its functional equation. — The paper ends with an asymptotic functional equation for  $Z(s)$ . — These three important papers are, unfortunately, full of misprints. *K. Mahler (Manchester).*

**Mahler, K.: On irreducible convex domains.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam 50, 98—107 (1947).

Es sei  $K$  ein symmetrischer, beschränkter Sternbereich in der Ebene und  $\Delta(K)$  die Determinante von  $K$  (= Determinante der kritischen Gitter von  $K$ , vgl. dazu die grundlegende Arbeit des Verf. „Lattice points in  $n$ -dimensional star bodies I [Proc. R. Soc., London, A 187, 151—187 (1946)], II [1. Mitteilung; Proc. Akad. Wet., Amsterdam 49, 331—343 (1946)]).  $K$  ist irreduzibel, wenn für jeden Sternbereich  $H$  in  $K$  ( $H \neq K$ ),  $\Delta(H) < \Delta(K)$  ist. Es wird nun gezeigt: Ist  $K$  konvex, dann enthält er einen irreduziblen (konvexen) Sternbereich  $K'$  (es kann  $K = K'$  sein). Der allgemeine Fall bleibt unentschieden. Für Parallelogramme ist der Satz sofort einzusehen. Der wichtigste Hilfssatz beim Beweis ist der folgende: Ist  $K$  reduzibel, dann gibt es einen konvexen Bereich  $H$  in  $K$  ( $H \neq K$ ), so daß  $\Delta(H) = \Delta(K)$ . Bei dem (schwierigen) Beweis wird eine bekannte Untersuchung von Minkowski (Diophantische Approximationen § 4) und die obige Arbeit II des Verf. benützt. *Hlawka.*

**Mahler, K.: On the area and the densest packing of convex domains.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam 50, 108—118 (1947).

Es sei  $K$  ein symmetrischer konvexer Bereich in der Ebene,  $V(K)$  sein Inhalt und  $\Delta(K)$  seine Determinante; dann handelt es sich um  $Q = \inf Q(K) = \inf V(K)/\Delta(K)$ , erstreckt über alle  $K$ .  $\frac{1}{4}Q(K)$  ist bekanntlich, und wie auch in der Arbeit gezeigt, die Dichte der dichtesten gitterförmigen Lagerung von nicht übereinander greifenden Bereichen, welche aus  $K$  durch Parallelverschiebung hervorgehen. Es wird gezeigt, daß es  $K$  gibt (extrem genannt), für die  $Q(K) = Q$  ist. Diese sind irreduzibel und es handelt sich um ihre Bestimmung. Unter Benützung der vorstehend referierten Arbeit wird folgendes gezeigt: Es genügt, alle irreduziblen  $K$  mit minimalem Inhalt zu finden, für die 1.  $K$  kein Parallelogramm ist, 2.  $\Delta(K) = 1$  ist, 3. Auf den Rand  $C$  von  $K$  die sechs Punkte liegen:  $P_1 = ((4/3)^{1/2}, 0)$ ,  $P_2 = ((1/12)^{1/2}, (3/4)^{1/2})$ ,  $P_3 = (-(1/12)^{1/2}, (3/4)^{1/2})$ , und ihre Gegenpunkte in bezug auf 0. — Durch weitere Überlegungen wird diese Aufgabe (im wesentlichen) auf folgendes Variationsproblem zurückgeführt:

Es sind vier Funktionen  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) zu bestimmen, welche die Periode  $\pi/3$  haben und für die 1.  $a_1(t)b_2(t) - a_2(t)b_1(t) = +\sqrt[4]{4/3}$ , 2.  $a_1(0) = b_2(0) = \sqrt[4]{4/3}$ ,  $a_2(0) = b_1(0) = 0$ , 3. die dreizeilige Determinante

$$|a_1(t_i) \cos t_i + b_1(t_i) \sin t_i, a_2(t_i) \cos t_i + b_2(t_i) \sin t_i, 1| \geq 0$$

für alle  $t_1, t_2, t_3$  mit  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < 2\pi$  ist und

$$I(K) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (a_1 \dot{a}_2 - a_2 \dot{a}_1 + b_1 \dot{b}_2 - b_2 \dot{b}_1) dt$$

ein Minimum wird. Der Verf. zeigt, daß die Ellipse nicht extrem ist und spricht die Vermutung aus, daß der Rand eines extremen Bereiches aus Geradenstücken und Hyperbelbögen besteht.

*Hlawka* (Wien).

**Rogers, C. A.: On the critical determinant of a certain non-convex cylinder.** Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 45—47 (1949).

In the language and notation of Mahler [Proc. R. Soc., London, A **187**, 151—187 (1946)] let  $K$  be a two-dimensional star domain in the  $xy$ -plane and let  $C$  be the corresponding three-dimensional cylindrical star domain consisting of points  $(x, y, z)$  with  $(x, y) \in K$ ,  $|z| \leq 1$ . It has been shown that  $\Delta(C) = \Delta(K)$  if  $K$  is convex [Y. Yeh, this Zbl. **34**, 26; J. H. H. Chalk and C. A. Rogers, this Zbl. **34**, 26]. Here the author constructs a non-convex  $K$  for which  $\Delta(C) < \Delta(K)$ . *Cassels*.

**Rogers, C. A.: A note on a problem of Mahler.** Proc. R. Soc., London, A **191**, 503—517 (1947).

For any  $\lambda$ ,  $1 < \lambda < \sqrt[4]{1,6}$ , the author constructs a star-body  $S$  in  $n$ -space with distance function  $F(P)$  and the following properties [for language and notations see Mahler, Proc. R. Soc., London, A **187**, 151—187 (1946)]. 1.  $S$  has a unique critical lattice  $A_0$  with  $d(A_0) = \Delta(S) = 1$ . Any admissible lattice  $A$  with  $d(A) < \lambda$  is obtainable from  $A_0$  by magnification without distortion. 2.  $F(P) < \lambda^{1/n}$  for only one pair of points  $\pm P \in A_0$ ,  $P \neq O$  (this solves problem A of Mahler loc. cit. p. 167). 3. There is a family of star-bodies  $S_\theta \supset S$  defined for all  $\theta > 0$  such that the volume of  $S_\theta - S$  tends to zero as  $\theta \rightarrow +0$ , but  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \Delta(S_\theta) = \lambda \Delta(S)$ . — The

body  $S$  is given explicitly for  $n = 2$ . The construction for  $n > 2$  is by induction.

*Cassels* (Cambridge).

**Ollerenshaw, Kathleen: The critical lattices of a sphere.** J. London math. Soc. **23**, 297—299 (1949).

Verf. gibt eine Modifizierung einer in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **31**, 205) angegebenen Methode zur Auffindung der kritischen Gitter der Einheitskugel im Dreidimensionalen, von der er die Möglichkeit einer Übertragung auf dasselbe Problem im Vierdimensionalen vermutet. (Vgl. dies. Zbl. **34**, 176.) *Heinhold*.

**Korobov, N. M.: Über einige Fragen der Gleichverteilung.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **14**, 215—238 (1950) [Russisch].

By a classical result of H. Weyl [Math. Ann. **77**, 313—352 (1916)], a real polynomial  $f(x)$  with at least one irrational coefficient not the constant term is uniformly distributed (mod 1). In this paper, functions which increase more rapidly than polynomials are considered, and the following results are obtained. (1) Let  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  be a real integral function; put  $a_k = e^{-\omega(k)}$ . If, for sufficiently large  $k$ , the inequality  $g \omega(k) < \omega(k+1) < G \omega(k)$  holds, where the constants  $g$ ,  $G$  satisfy  $G > g > 2$ , then the values  $f(n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) are uniformly distributed (mod 1). (2) The same is true if there is a constant  $\lambda > 3$  such that

$$\omega(k) \geq k^\lambda, \quad (1 + 1/k) \omega(k) \leq \omega(k+1) \leq k \omega(k)$$

for all sufficiently large  $k$ . (3) Let the values  $\varphi(k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) be uniformly distributed (mod 1). Let  $q_1, q_2, q_3, \dots$  be integers greater than 1 tending to infinity,



and let

$$\alpha = \delta_0 + \frac{\delta_1}{q_1} + \frac{\delta_2}{q_1 q_2} + \frac{\delta_3}{q_1 q_2 q_3} + \dots \quad \text{where} \quad \delta_k = [\theta_k q_k], \quad \theta_k = \varphi(k) - [\varphi(k)].$$

Then the values  $f(k) = \alpha q_1 q_2 \dots q_k$  are uniformly distributed (mod 1). (4) The same is true if  $q_1 = q_2 = q_3 = \dots \geq 2$ . K. Mahler (Manchester).

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld: Asymptotic C-distribution. I.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **52**, 1151—1157; Indag. math., Amsterdam **11**, 425—431 (1949).

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld: Asymptotic C-distribution. II.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **52**, 1158—1163; Indag. math., Amsterdam **11**, 432—437 (1949).

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld: Some theorems in the theory of uniform distribution.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 305—308; Indag. math., Amsterdam **12**, 53—56 (1950).

**Meulenbeld, B.: On the uniform distribution of the values of functions of  $n$  variables.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 311—317; Indag. math., Amsterdam **12**, 59—65 (1950).

For any point set  $\mathfrak{M}$  on  $t \geq \Phi$  denote by  $\|\mathfrak{M}\|$  and  $*\|\mathfrak{M}\|$  the measure, and the exterior measure, of  $\mathfrak{M}$  in the sense of Lebesgue, respectively. Further let  $\mathfrak{B}$  be any subinterval of  $\mathfrak{J}$ :  $0 \leq x \leq 1$ , and let  $\{\mathfrak{B}_k\}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) be any infinite sequence of non-overlapping subintervals of  $\mathfrak{J}$ . Assume  $f(t)$  is measurable for  $t \geq 0$ , and denote by  $\mathfrak{S}_T(\mathfrak{M})$  the set of all  $t$  in  $0 \leq t \leq T$  for which  $f(t)$  is (mod 1) congruent to a point in  $\mathfrak{M}$ . Then we say that  $f(t)$  is  $C^I$ -uniformly distributed (mod 1) (or: of type  $C^I$ ) if

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \|\mathfrak{S}_T(\mathfrak{B})\| = \|\mathfrak{B}\|$$

for all  $\mathfrak{B}$ ; that it is  $C^{II}$ -uniformly distributed (mod 1) (or: of type  $C^{II}$ ) if

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{S}_T(\mathfrak{B}_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k \right\|$$

for all sequences  $\{\mathfrak{B}_k\}$ ; and that it is  $C^{III}$ -uniformly distributed (mod 1) (or: of type  $C^{III}$ ) if

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} *\|\mathfrak{S}_T(\mathfrak{G})\| = \|\mathfrak{G}\|$$

for every measurable subset  $\mathfrak{G}$  of  $\mathfrak{J}$ . — In the first paper, it is proved that the types  $C^{II}$  and  $C^{III}$  coincide and that the type  $C^I$  is more general. Integral tests, similar to the classical tests of H. Weyl for the uniform distribution of a sequence, are then given for  $f(t)$  to be of type  $C^I$  or  $C^{III}$ , and these tests are applied to the actual construction of functions which are, or are not, of these types. The fourth paper finally gives the extension to functions of several variables. K. Mahler (Manchester).

**Hartman, S.: Une généralisation d'un théorème de M. Ostrowski sur la répartition des nombres mod 1.** Ann. Soc. Polonaise Math. **22**, 169—172 (1950).

Write  $R(\alpha) = \alpha - [\alpha]$  for the fractional part of  $\alpha$ . If  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  are  $n$  real numbers,  $x$  is a positive integer, and  $I_1, \dots, I_n$  are  $n$  subintervals of  $0 \leq \xi < 1$ , denote by  $N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1, \dots, I_n)$  the number of positive integers  $y \leq x$  for which  $R(y \alpha_i) \in I_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). The author proves the following result: (A) If  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  are  $n$  arbitrary real numbers, if  $\xi_1, \dots, \xi_n$  are  $n$  real numbers in  $0 \leq \xi < 1$  which are not all rational, and if  $x$  is any positive integer, then there exist  $2n$  intervals  $I_1^+, \dots, I_n^+, I_1^-, \dots, I_n^-$  of lengths  $|I_i^+| = |I_i^-| = \xi_i$  such that

$$(1) \quad N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1^+, \dots, I_n^+) > x \prod_{i=1}^n \xi_i; \quad N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1^-, \dots, I_n^-) \leq x \prod_{i=1}^n \xi_i.$$

(B) If, however, all the  $\xi_i$ 's are rational, then either (1) holds with  $\leq$  replaced by  $<$ , or

$$(2) \quad N(\alpha_1, \dots, \alpha_n; x; I_1, \dots, I_n) = x \prod_{i=1}^n \xi_i$$

for any  $n$  intervals  $I_1, \dots, I_n$  of lengths  $|I_i| = \xi_i$ . — The special case  $n = 1$  of this result was given by A. Ostrowski [Jber. Deutsche Math.-Verein. **39**, 34—46 (1930)].

K. Mahler (Manchester).

Schneider, Theodor: Zum Beweis der Transzendenz von  $e$  und  $\pi$ . Math.-phys. Semesterber., Göttingen **1**, 299—303 (1950).

Inhaltliche Wiedergabe eines auf der Tagung zur Pflege des Zusammenhanges von Universität und Schule am 20. 5. 1948 zu Münster gehaltenen Vortrages. Es wird eine gedanklich sehr einfache Methode für Transzendenzbeweise angegeben, die auf der Abschätzung der Wachstumsordnung einer ganzwertigen ganzen transzendenten Funktion  $f(z)$  einer ganzzahligen Veränderlichen beruht [vgl. auch eine neue Arbeit des Verf. in Math. Ann., Berlin **121**, 131—140 (1949); dies. Zbl. **34**, 317]. Als Beispiel wird speziell mit  $f(z) = e^{az}$ ,  $a \neq 0$ , ein Transzendenzbeweis für  $e$  und  $\pi$  erbracht.

Heinhold (München).

## Analysis.

### Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• Widder, David V.: Advanced calculus. New York: Prentice-Hall, Inc. 1947. XVI, 432 p.

Die vorliegende Einführung in die reelle Analysis wendet sich an Studierende, welche bereits so weit in das Gebiet eingedrungen sind, daß sie die Differential- und Integralrechnung kalkülmäßig beherrschen. Ihr Hauptziel ist es, den Leser nun ergänzend auch mit der theoretischen Seite des Gegenstands vertraut zu machen. Unter diesem Gesichtspunkt lernt er etwa diejenigen Teile der Differential- und Integralrechnung kennen, die bei uns in Deutschland den Studierenden der Mathematik in der Analysis-Vorlesung geboten werden. Darüber hinaus bringt das Buch noch Einführungen in die Theorie des Stieltjes-Integrals und in die Theorie der Laplace-Transformation sowie deren Anwendung auf Differential- und Differenzgleichungen. Die Darstellung ist durchweg klar und übersichtlich. Sie führt den Leser unter Heranziehung zahlreicher Beispiele geschickt an die ihm neuen theoretischen Fragestellungen heran. Jedem Kapitel sind Übungsaufgaben beigegeben. — Inhaltsverzeichnis: I. Partial differentiation. II. Vectors. III. Differential geometry. IV. Applications of partial differentiation. V. Stieltjes integral. VI. Multiple integrals. VII. Line and surface integrals. VIII. Limits and indeterminate forms. IX. Infinite series. X. Convergence of improper integrals. XI. The Gamma function. Evaluation of definite integrals. XII. Fourier series. XIII. The Laplace transform. XIV. Applications of the Laplace transform.

Friedrich Lösch (Stuttgart).

Stewart, Frank M.: Integration in noncommutative systems. Trans. Amer. math. Soc. **68**, 76—104 (1950).

Es sei  $\mathfrak{D}$  ein vollständiger metrischer Raum mit einer binären assoziativen Operation (geschrieben als Multiplikation)  $a \cdot b$ ,  $a \in \mathfrak{D}$ ,  $b \in \mathfrak{D}$ ,  $a \cdot b \in \mathfrak{D}$  mit Einselement  $e$  (d. h. es gelte für  $x \in \mathfrak{D}$   $x \cdot e = e \cdot x = x$ ). Verf. nennt eine Funktion  $\mu(t, \sigma)$ , die zu den Paaren reeller Zahlen  $\alpha \leq t \leq \beta$  und nach Lebesgue meßbarer Teilmengen  $\sigma$  des Intervalls  $[x, \beta]$  ein Element  $\mu(t, \sigma) \in \mathfrak{D}$  zuordnet, ein Differential über  $[x, \beta]$ . Mit Hilfe der so erklärten Differentiale werden verschiedene abstrakte

Intégrale definiert. Das „gewöhnliche Integral“  $\int_x^\beta \mu\{t, dt\}$  ist z. B. das Element

$x \in \mathfrak{D}$  mit der Eigenschaft, daß man bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so wählen kann, daß bei jeder Einteilung von  $[x, \beta]$  in paarweise fremde und nach ihrer Lage in wachsender Ordnung angeordnete Intervalle  $A_1, \dots, A_n$  von der Länge  $< \delta$

und bei beliebigen  $t_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).  $\varrho\left(\prod_{i=1}^n \mu(t_i, A_i), x\right) < \varepsilon$  ausfällt  $[\varrho(y, z)$

bedeutet dabei die Entfernung im metrischen Raum  $\mathfrak{D}$ ]. Etwas komplizierter sind die Definitionen der „einfachen“, „Riemannschen“ und „Lebesgueschen“ Intégrale. Die Eigenschaften dieser Intégrale werden untersucht, und es wird gezeigt, daß sich daraus bei spezieller Wahl des Differentials  $\mu(t, \sigma)$  eine Reihe der älteren additiven und multiplikativen Integraldefinitionen ergibt.

Császár (Budapest).



Maharam, Dorthy: The representation of abstract measure functions. Trans. Amer. math. Soc. 65, 279—330 (1949).

Eine abstrakte Maßalgebra  $(E, \sim)$  wird folgendermaßen erklärt:  $E$  ist ein Boolescher  $\sigma$ -Verband mit Einheit  $e$ , in welchem höchstens abzählbar viele paarweise fremde Elemente existieren mit den Eigenschaften I. wenn  $x = \bigcup x_i$  und  $y = \bigcup y_i$  mit  $x_i \cap x_j = y_i \cap y_j = 0$  für  $i \neq j$ , (d. h. Zerlegungen sind) und  $x_i \sim y_i$  für jedes  $i$ , dann  $x \sim y$ , II. wenn  $x \sim x'$  und  $y \subseteq x$ , so existiert  $y' \subseteq x'$  mit  $y \sim y'$ , III. ist  $x \sim y$ , so existieren Zerlegungen  $x = \bigcup x_i$ ,  $y = \bigcup y_i$  mit  $x_i \sim y_i$  und endlichen  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots$ . Hierbei heißt  $x \in E$  endlich, wenn aus  $y \subseteq x$  und  $y \sim x$  folgt  $y = x$ . Ein Boolescher  $\sigma$ -Verband  $(E, \mu)$  mit reellem, totaladditivem, reduziertem und normalem Maß  $\mu(x) \geq 0, x \in E$ , wird zu einer Maßalgebra, wenn  $x \sim y \leftrightarrow \mu(x) = \mu(y)$  definiert wird. Die von Verf. erklärte abstrakte Maßalgebra erfaßt auch Fälle, wo das Maß nicht reell ist. Wird in  $(E, \sim)$  die Äquivalenz aus einem Maß  $\lambda(x), x \in E$ , induziert, so betrachtet man  $(E, \sim)$  und  $(E, \lambda)$  als natürlich isomorph. Spezielle abstrakte Maßalgebren werden von Verf. untersucht, wie z. B. die numerische Maßalgebra  $(J, \mu)$  mit reellem Maß, die Algebra  $K$ , die von abzählbar vielen Atomen erzeugt wird, mit Maß 1 für jedes Atom; die triviale Maßalgebra  $U$ , in welcher je zwei verschiedene Elemente nicht äquivalent sind; die Maßalgebra der direkten Summe  $E' \oplus E''$  von zwei  $(E', \sim)$  und  $(E'', \sim)$  und die Maßalgebra des direkten Produktes  $J \otimes U$ . Der Hauptsatz der Arbeit ist: Eine abstrakte Maßalgebra  $(E, \sim)$  ist isomorph zu einem Hauptideal einer Maßalgebra der Form  $(K \oplus J) \otimes U$ . Dieses Ideal [also auch  $(E, \sim)$ ] ist durch eine Maßalgebra  $(E, M)$  darstellbar, wobei  $M$  ein Maß ist mit Werten aus Restklassen nicht negativer reeller Funktionen mod Nullfunktionen, die auf einer Grundmenge definiert sind, z. B. stetiger Funktionen mod Funktionen, die außerhalb einer Menge der ersten Kategorie verschwinden. Für spezielle Darstellungen und weitere Einzelheiten verweisen wir auf die sehr interessante Arbeit der Verf. D. A. Kappos.

Helsel, R. G.: A note on convergence in area. Proc. Amer. math. Soc. 1, 23—24 (1950).

Man bezeichne mit  $S$  das Einheitsquadrat  $0 \leq u, v \leq 1$  der  $(u, v)$ -Ebene und mit  $T_n (n = 1, 2, \dots)$  eine stetige Abbildung  $x = x_n(u, v), y = y_n(u, v), z = z_n(u, v)$  von  $S$  in den dreidimensionalen euklidischen Raum. Bedeutet nun  $T_\alpha$  die orthogonale Projektion des Raumes auf die Ebene  $\alpha$  und bezeichnet man mit  $A(T_n)$  das Lebesguesche Oberflächenmaß der durch  $T_n$  bestimmten  $F$ -Fläche (s. T. Radó, dies. Zbl. 33, 170), so wird folgender Satz bewiesen: Konvergiert  $T_n$  gleichmäßig in  $S$  nach  $T_0$  und ist  $A(T_n) < +\infty$  für  $n = 1, 2, \dots$ , so ist zum Bestehen von  $A(T_n) \rightarrow A(T_0)$  notwendig und hinreichend, daß für jede Ebene  $\alpha$   $A(T_\alpha T_n) \rightarrow A(T_\alpha T_0)$  gilt. Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde schon von Radó (dies. Zbl. 33, 172) bewiesen.

Császár (Budapest).

Haupt, Otto und Christian Y. Pauc: Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maße. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 247—253 (1949).

Let  $E$  be any set,  $\mathcal{E}$  be the system of all the subsets of  $E$ ,  $\mathcal{J}$  be a non empty field  $\subseteq \mathcal{E}$  (i. e. a subsystem of  $\mathcal{E}$  closed with respect to the finite sum and subtraction),  $\psi$  be a totally additive set function defined in  $\mathcal{J}$ ; then there is a Lebesgue measure  $\varphi$  defined in  $\mathcal{E}$  coinciding with  $\psi$  for any set  $A \in \mathcal{J}$  (see H. Hahn and A. Rosenthal, Set Functions, New Mexico Press, Albuquerque, 1948; this Zbl. 33, 53). In the present paper the following analogous question is discussed for the Boolean algebras. Let  $U$  be a Boolean algebra (for the definition reference is paid to the book by C. Carathéodory, which will appear under the title: Mass und Integral und ihre Algebraisierung, Verlag Birkhäuser, Basel). Let  $i|V$  be a content function (Inhalt) (i. e. a non negative additive set function  $i$  defined on the Boolean algebra  $V \subseteq U$ ). The authors prove that there is a „measure“  $j|W$  (i. e. a non negative totally additive

set function  $j$  defined on a Boolean  $\sigma$ -algebra  $W$ ,  $V \subset W \subset U$ , which coincides with  $i$  for each set  $A \in V$  (with  $\sigma$ -algebra  $W$  is meant that  $W$  is closed with respect to the countable sum).  
*L. Cesari (Bologna).*

**Stampacchia, Guido:** Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad'un'altra. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 6, 198—201 (1949).

Let (1)  $f_m(x, y)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $(x, y) \in R \equiv [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ , be a sequence of functions, continuous with respect to the (real) variable  $y$ , measurable with respect to the (real) variable  $x$ . The main result of the author is that, if a) for almost all  $x \in (a, b)$  the functions  $f_m(x, y)$  are equicontinuous as functions of  $y$  only; if b) for each  $y \in (c, d)$  the sequence  $f_m(x, y)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , converges almost everywhere in  $(a, b)$ , then, for each  $\varepsilon > 0$  there exists a measurable linear set  $i \subset (a, b)$  such that  $\text{mis } i > (b - a) - \varepsilon$  and such that the sequence (1) converges uniformly on the set  $I \subset R$  of the points  $(x, y) \in R$  with  $x \in i$ . This result gives a very useful addition along the lines of the Severini-Egoroff theorem. Other results and corollaries are obtained.  
*L. Cesari (Bologna).*

**Salas, José Martinez:** Verallgemeinerung der singulären Integrale auf das Stieltjes-Integral. *Mem. Mat. Inst. „Jorge Juan“*, Nr. 9, 63 S. (1949) [Spanisch].

Sia  $f(t)$  una funzione finita e misurabile in  $(a, b)$  e  $\varphi(t)$  una funzione determinante assolutamente continua in  $(a, b)$ . L'integrale di Stieltjes-Lebesgue

$$(1) \quad \int_a^b f(t) d\varphi(t)$$

posto, secondo la decomposizione canonica di Jordan,  $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ , può esistere senza che esistano i due integrali  $\int_a^b f(t) d\varphi_1(t)$  e  $\int_a^b f(t) d\varphi_2(t)$ . È noto che se il prodotto  $f(t) \varphi'(t)$  è

sommabile in  $(a, b)$ , esiste  $(ST - L) \int_a^b f(t) d\varphi(t)$  ed è eguale a  $(L) \int_a^b f(t) \varphi'(t) dt$ . Nel Cap. I

l'A. prova che questa condizione è solo sufficiente e dà quindi le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la funzione  $\varphi(t)$  per l'esistenza dell'integrale (1) in classi particolari di funzioni  $f(t)$  [a)  $f(t)$  della classe  $L$ ,  $\varphi'(t)$  quasi dappertutto limitata; b)  $f(t)$  della classe  $L^q$  ( $q > 1$ ),  $\varphi'(t)$  della classe  $L^{q/(q-1)}$  ecc.]. — Nel Cap. II l'A. dà le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la funzione determinante  $\varphi(t, n)$ , che dipende dai valori  $n$  dei numeri della serie naturale, perchè l'integrale

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t, n)$$

tenda a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , per una famiglia assegnata di funzioni  $f(t)$ . Vengono successivamente prese in esame: a) la classe  $L$  delle funzioni  $f(t)$ , b) la classe  $L^q$  ( $q > 1$ ), c) la classe delle funzioni  $f(t)$  misurabili e limitate, d) la classe delle funzioni  $f(t)$  integrabili ( $R$ ), e) la classe delle funzioni  $f(t)$  semplicemente discontinue, cioè con discontinuità solo di prima specie, f) la classe delle funzioni  $f(t)$  a variazione limitata. Le condizioni che riguardano la funzione  $\varphi(t, n)$  sono per ognuna di tali classi, due e la seconda che è comune a tutte le famiglie considerate, esprime che la misura di qualunque sottoinsieme (o sottointervallo, a seconda il caso) rispetto alla funzione determinante deve tendere a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Viene osservato inoltre che se si prende in esame la famiglia delle funzioni  $f(t)$  continue, la condizione ora enunciata non è più necessaria. — Nel Cap. III si definisce per integrale singolare di Stieltjes un integrale del tipo

$$(2) \quad \int_0^l f(t) d\varphi(t - x, n)$$

dove  $x$  è un punto interno di  $(0, l)$  e  $\varphi(t - x, n)$  è una funzione definita nei punti  $t$  di tale intervallo e per i numeri  $n$  della serie naturale, la quale, assegnato un qualunque numero positivo  $\delta$  inferiore al più piccolo dei due numeri  $x$  e  $l - x$ , risulti assolutamente continua nei punti  $t$  tali che  $|t - x| \geq \delta$  e verifichi le condizioni di cui si è detto nel Cap. II relativamente a una determinata famiglia di funzioni  $f(t)$ . — L'A. dà le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la funzione determinante perchè esista l'integrale (2), sia singolare nel punto  $t = x$  e tendo verso  $f(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . — Vengono successivamente presi in esame: a) i punti  $x$  di continuità, b) i punti  $x$  di discontinuità isolata, finita e di prima specie, c) i punti  $x$  di discon-



tinuità di seconda specie nei quali la funzione  $F(t) = \int_x^t |f(t) - f(x)| dt$  ammetta una derivata nulla e in un intorno di  $x$  la  $f(t)$  sia limitata. Giuliano (Pisa).

**Valiron, Georges:** Flächeninhalt und Volumen. An. Soc. ci. Argentina **149**, 185—195 (1950) [Spanisch].

Wiedergabe eines Vortrags am 7. 8. 1946 vor der Sociedad Científica Argentina.

**Jefferey, R. L. and C. N. Rowse:** The limit points of Riemann sums. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, **III**. S. **43**, 21—26 (1949).

Die Verff. beabsichtigen einen neuen Beweis für folgenden Satz von P. Hartman (dies. Zbl. **29**, 19) zu geben: Sind  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  beschränkte reelle Funktionen im Intervall  $[a, b]$  und  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Einteilung von  $[a, b]$ , so bilden die Limespunkte für  $\max (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$  der Punkte

$$\left( \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) (x_i - x_{i-1}), \dots, \sum_{i=1}^n f_k(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right)$$

des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes (wobei  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$  ist) eine konvexe, abgeschlossene Menge. Nach Meinung des Ref. ist aber der Beweis nicht ganz in Ordnung. Császár (Budapest).

**Zahorski, Z.:** Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 306—323 (1949).

Wir betrachten endliche reelle Funktionen  $f(x)$ , die überall mit Ausnahme einer abzählbaren Menge von Werten  $x$  eine wohlbestimmte, endliche oder unendliche approximative Ableitung  $f'_{ap}(x)$  besitzen. Verf. beweist, daß, wenn man  $f'_{ap}(x)$  ganz beliebig in den Punkten der Ausnahmемenge definiert,  $f'_{ap}(x)$  eine Funktion von höchstens dritter Klasse nach Baire ist. Er bemerkt aber in einer Fußnote, daß es ihm auch zu beweisen gelungen ist, daß  $f'_{ap}(x)$  höchstens von zweiter Klasse ist. Es wird dann eine Funktion  $f(x)$  angegeben mit  $f'_{ap}(x)$  tatsächlich von der zweiten Klasse. Császár (Budapest).

**Sibirani, Filippo:** Sulle funzioni ordinatrici. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. **5**, 27—34 (1949).

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $a \vdash b$ , ivi continua; se  $\varphi(x)$  è la funzione monotona non decrescente in  $a \vdash b$  soddisfacente alla condizione che la misura dell'insieme dei punti in cui è  $\alpha \leq \varphi(x) \leq \beta$  eguaglia la misura dell'insieme dei punti di  $a \vdash b$  in cui è  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ , qualunque sia la coppia dei numeri  $\alpha$  e  $\beta$ , si dice che  $\varphi(x)$  è la funzione ordinatrice non decrescente di  $f(x)$  e la indicheremo con  $\Omega_1^{(a,b)} f(x)$ . In modo analogo viene definita la funzione ordinatrice non crescente di  $f(x)$  che sarà indicata con  $\Omega_2^{(a,b)} f(x)$  [cf. Sibirani, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. **3** (1947)]. Scopo del lavoro è di determinare l'espressione analitica delle funzioni ordinatrici di alcuni tipi di funzioni. — Ad esempio: sia  $f(x)$  una funzione continua in  $a \vdash b$  che soddisfa alla condizione  $f(a+t) = f(b-\alpha t)$  e che in  $a \vdash \frac{a\alpha+b}{1+\alpha}$  è crescente. Si trova

$$\Omega_1^{(a,b)} f(x) = f\left(\frac{a\alpha+x}{1+\alpha}\right); \quad \Omega_2^{(a,b)} f(x) = f\left(a + \frac{b-x}{1+\alpha}\right)$$

ecc. ecc.

Giuliano (Pisa).

**Sibirani, Filippo:** Questioni di massimo e di minimo. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. **4**, 111—117 (1948).

Sia  $f(x)$  una funzione continua definita nell'intervallo  $a \vdash b$ , avente il minimo  $l$  e il massimo  $L$ , la quale assume uno stesso valore soltanto in un numero finito di punti, a meno che non contenga tratti, in numero finito, di invariabilità. Sia poi  $I$  l'insieme delle funzioni  $\varphi(x)$  definite in  $a \vdash b$  per cui, per ogni coppia di valori  $\alpha$  e  $\beta$  di  $l \vdash L$  l'insieme dei punti in cui è  $\alpha \leq \varphi(x) \leq \beta$  abbia misura eguale alla misura dell'insieme dei punti in cui è  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ ; la  $\varphi(x)$  può avere punti di discontinuità, ma in ognuno di essi,  $x$ , essa deve essere continua a sinistra (p es.)

ed esista inoltre  $\varphi(x_i + 0)$ . La funzione continua monotona non decrescente in  $a \vdash b$  di  $I$  dicesi funzione ordinatrice non decrescente di  $f(x)$  in  $a \vdash b$ ; e quella, non crescente, continua dello stesso insieme  $I$ , dicesi funzione ordinatrice non crescente di  $f(x)$  in  $a \vdash b$  [cf. Somigliana, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 8<sub>1</sub>, 4—12, 125—135 (1899); Sibiriani, ibidem VI. S. 20<sub>2</sub>, 694—701 (1911); 21, 825—830 (1912)]. — L'A. dimostra la proposizione: „Se  $\psi(x)$  è una funzione positiva in  $a \vdash b$  ed  $A$  è un numero  $> 1$ , l'insieme dei numeri

$\int_a^b \psi(x) A^{\int_a^x \varphi(t) dt} dx$  in cui  $\varphi(t)$  è una qualunque funzione di  $I$  ha il massimo:

$$\int_a^b \psi(x) A^{\int_a^x F(t) dt} dx$$

ove  $F(x)$  la funzione ordinatrice non decrescente delle funzioni

di  $I$  ed ha il minimo  $\int_a^b \psi(x) A^{\int_a^x G(t) dt} dx$  ove  $G(x)$  la funzione ordinatrice non crescente delle funzioni di  $I$ .

Giuliano (Pisa).

Orlicz, W.: Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée. I. *Studia math.* 10, 21—39 (1948).

Es seien  $\omega(h)$  und  $\omega_1(h)$  zwei für  $0 \leq h \leq l$  definierte, nichtabnehmende Funktionen mit  $\omega(0) = \omega_1(0) = 0$  und  $\omega(h) > 0$ ,  $\omega_1(h) > 0$  für  $h > 0$ . Setzt man  $\gamma(h) = \sup_{0 < k \leq h} \omega(k)$ , so wird folgender Satz bewiesen, der die Antwort auf ein Problem von S. Ruziewicz enthält: Für die Existenz einer nach  $l$  periodischen Funktion  $f(x)$  mit den Eigenschaften

- (1)  $|f(x+h) - f(x)| \leq \omega(|h|)$  für  $-\infty < x < +\infty$ ,  $|h| \leq l$ ,
- (2)  $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega_1(h)} = +\infty$  für  $-\infty < x < +\infty$ ,

ist notwendig und hinreichend, daß  $\lim_{h \rightarrow +0} \omega_1(h) \gamma(h)/h = 0$  gilt. Daß diese Bedingung hinreichend ist, wird durch die Konstruktion der entsprechenden Funktion  $f(x)$  bewiesen. Im nichttrivialen Falle  $\lim_{h \rightarrow +0} h' \omega_1(h) < +\infty$  hat  $f(x)$  die Form

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q(\beta_n x)$  mit geeigneten  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $q(x)$ , und es wird noch bewiesen, daß

dann auch  $f_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \alpha_n q(\beta_n x)$  die Eigenschaften (1) und (2) besitzt, wenn nur  $q = \{q_n\}$  eine Folge aus lauter Nullen und Einsen ist, mit Ausnahme einer Menge von Folgen  $q$ , die im vollständigen metrischen Raum aller solchen Folgen (metrisiert durch  $\chi(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |q_n^{(1)} - q_n^{(2)}|$ ) von erster Kategorie ist. Eine Analyse zahlreicher Spezialfälle wird beigelegt.

Császár (Budapest).

Tagamlitzki, Y.: Sur une propriété de la fonction exponentielle. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 33—34 (1948).

Ganz im Reellen verlaufender Beweis des früher vom Verf. [Annuaire Univ. Sofia, Fac. phys.-math., Livre 1, 42, 239 (1945—1946) und C. r. Acad. Sci., Paris 223, 940—942 (1946)] mit komplexen Methoden bewiesenen Satzes: Ist die reelle Funktion  $f(x)$  für  $x \geq a$  unendlich oft differenzierbar und gilt für  $x \geq a$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   $|f^{(n)}(x)| \leq A e^{-x}$ , so ist  $f(x) = C e^{-x}$ .

Császár (Budapest).

● Aczél, Jean: Inégalités. Sonderdruck aus Gaz. Mat., Lisboa 39, 40, 41, 42. Lisboa: 1949.

Dieses Heftchen, eine Zusammenfassung von vier Artikeln aus der Gazeta de Matemática, stellt eine Einführung in das Gebiet der elementaren Ungleichungen



und der konvexen Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher dar; es eignet sich vorzüglich, den von der Schule kommenden Anfänger, dem ja das Operieren mit Ungleichungen als etwas ganz Neues gegenübertritt, mit diesem wichtigen Instrument der Analysis vertraut zu machen. Der Stoff ist um die wenigen Definitionen gruppiert und erscheint aufgegliedert in Form von 58 kleineren Problemen, Übungsaufgaben und Anwendungsbeispielen, denen kurze Lösungen beigegeben sind.

Aumann (Würzburg).

**Peijel, Arne:** Eine Ungleichung. Mat. Tidsskr. A, København 1949, 67—69 (1949) [Dänisch].

$f(x)$  étant une fonction bornée et intégrable dans  $(0, 2\pi)$  on a, d'après l'inégalité de Schwarz,  $2\pi \int_0^{2\pi} f^2 dx - \left( \int_0^{2\pi} f dx \right)^2 \geq 0$ . L'A. montre que si de plus  $f(x)$  possède des dérivées du premier et du deuxième ordre bornées et intégrables, alors

$$2\pi \theta \int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 dx \leq 2\pi \int_0^{2\pi} f^2(x) dx - \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) dx \right\}^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 dx$$

où  $\theta = \int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} [f''(x)]^2 dx$ . Horváth (Paris).

**Hilding, Sven H.:** On the constant in Hölder's inequality. Ark. Mat., Stockholm 1, Nr. 11, 93—100 (1950).

Sind die meßbaren Funktionen  $f, g$  nicht negativ,  $h$  nicht fallend auf der linearen meßbaren Punktmenge  $E$  und existieren die Lebesgue-Stieltjes-Integrale  $\int_E f dh$  und

$\int_E g dh$  mit den Normierungswerten 1, so läßt sich die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung in der Form  $J = \int_E f^r g^{1-r} dh \leq 1$  schreiben, wo  $0 < r < 1$ .  $J$  erreicht

den Wert 1, wenn  $f$  und  $g$  fast überall gleich sind. Schließt man diese Möglichkeit systematisch aus, durch eine zusätzliche Bedingung  $\mathfrak{B}$  bezüglich  $f$  und  $g$ , so gibt es im allgemeinen eine Zahl  $\theta(r; \mathfrak{B})$ , so daß  $J \leq \theta(r; \mathfrak{B})$  für Funktionen  $f$  und  $g$ , welche der Bedingung  $\mathfrak{B}$  genügen. Verf. behandelt hier noch einmal ein Beispiel von F. Carlsson [Ark. mat. astron. fys. 26 A, Nr. 9, 4—5 (1938)], in welchem die Bedingung  $\mathfrak{B}$  darin besteht, daß das Verhältnis  $f/g$  alle Werte eines bestimmten offenen Intervalles  $(a, b)$  um 1 herum ( $a < 1 < b$ ) ausläßt, und anschließend als zweites Beispiel den Fall, daß die Bedingung  $\mathfrak{B}$  die Gestalt einer Ungleichung  $\int_E |f - g| dh \geq 2\varrho$  hat, wo die positive Konstante  $\varrho$  fest gegeben ist.

Die Ermittlung der scharfen Konstanten  $\theta(r; \mathfrak{B})$  läßt sich in beiden Fällen auf Extremalprobleme elementarer Natur zurückführen.

Aumann (Würzburg).

**Obrechhoff, N.:** Sur quelques inégalités pour les dérivées et les différences des fonctions d'une variable réelle et pour les différences des suites. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 1—4 (1948).

Es sei  $y_1 < y_2 < \dots$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$  eine Folge reeller Zahlen, und es gelte für die reellen Funktionen  $f(x)$  und  $\varphi(x)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)/y_n^m = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n)/y_n^m = B$ ,  $m \geq 0$  ganz. Hat man für ein  $n > m$  und für  $x > a$   $|f^{(n)}(x)| \leq |\varphi^{(n)}(x)|$  und  $|q^{(n)}(x)| > 0$ , so hat man für  $x > a$

$$|f^{(m)}(x) - m! A| \leq |\varphi^{(m)}(x) - m! B|,$$

und zwar gilt hier für alle  $x > a$  gleichzeitig entweder das Zeichen  $<$  oder das Zeichen  $=$ . Aufzählung (ohne Beweise) einer Reihe von ähnlichen Resultaten.

Császár (Budapest).

**Chimenti, Angelina:** Disuguaglianze tra medie associative. Pubbl. Fac. Sci. Ing. Univ. Trieste, Ser. B, Nr. 19; Statistica 7, 39—47 (1947).

Sia  $\xi = \varphi(x)$  una funzione monotona (crescente o decrescente) e quindi invertibile; indichiamo con  $\varphi^{-1}$  la funzione inversa della  $\varphi$  e consideriamo infine la variabile casuale (v. c.)  $X$ . — Si chiama „media secondo la funzione  $\varphi$  della v. c.  $X$ “ la quantità  $x_\varphi$  definita da:

$$x_\varphi = \varphi^{-1}(M[\varphi(X)]).$$

L'A. espone due criteri per stabilire una disegualianza tra le medie secondo le due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ ; e cioè: 1. Criterio: è  $x_\varphi \geq x_\psi$  a seconda che la curva  $y = \psi[\varphi^{-1}(\xi)]$  è concava o lineare o convessa; 2. Criterio: è  $x_\varphi \geq x_\psi$  a seconda che  $\varphi''/\varphi' \geq \psi''/\psi'$ . — L'A. sviluppa successivamente alcune interessanti applicazioni di questi due criteri.

G. Pompilj (Roma).

G.-Mikusinszki, Jan: Sur les moyennes de la forme  $\varphi^{-1}[\sum q\psi(x)]$ . *Studia math.* **10**, 90—96 (1948).

Verf. gibt folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für den Vergleich zweier quasarithmetischer Mittelwerte:

$\varphi^{-1}[q_1\psi(x_1) + q_2\psi(x_2) + \dots + q_n\psi(x_n)] < \chi^{-1}[q_1\chi(x_1) + q_2\chi(x_2) + \dots + q_n\chi(x_n)]$  gilt für jedes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ( $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ ) dann und nur dann, falls

$$(1) \quad \frac{\chi(q_1x_1 + q_2x_2) - \chi(x_1)}{\chi(x_2) - \chi(x_1)} < \frac{\psi(q_1x_1 + q_2x_2) - \psi(x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)}$$

[mit der bei der quasarithmetischen Mittelbildung erlaubten Transformation  $f(x) \sim \alpha f(x) + \beta$  werden die Funktionen  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  in den Punkten  $x_1$  und  $x_2$  einander gleich gemacht, dann soll die aus  $\psi(x)$  transformierte Funktion über der aus  $\chi(x)$  transformierten liegen]: oder

$$(2) \quad \frac{q_1\psi(x_1) + q_2\psi(x_2) - \psi(q_1x_1 + q_2x_2)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} < \frac{q_1\chi(x_1) + q_2\chi(x_2) - \chi(q_1x_1 + q_2x_2)}{\chi(x_1) - \chi(x_2)}$$

oder

$$(3) \quad \frac{\frac{1}{2}[\psi(x_1) + \psi(x_2)] - \psi[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)]}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} < \frac{\frac{1}{2}[\chi(x_1) + \chi(x_2)] - \chi[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)]}{\chi(x_2) - \chi(x_1)}$$

oder

$$(4) \quad \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} < \frac{\chi''(x)}{\chi'(x)}$$

[hiersollen  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  auch zweimal stetig differenzierbar sein, während sie in (1), (2), (3) nur als stetig und streng monoton vorausgesetzt wurden]. [Bemerkung des Ref.: (4) folgt auch aus der üblichen Bedingung der Konvexität von  $\chi\psi^{-1}(x)$  (für diese Vergleichs-Bedingung s. z. B. Hardy-Littlewood-Pólya: *Inequalities*, Cambridge 1934, pp. 70, 75; dies. Zbl. **10**, 107)]. Verf. nennt von solchen Funktionen die eine „logarithmisch weniger konvex“ als die andere. Aczél (Miskole).

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

• Rogosinski, Werner: *Fourier series*. — Translated by Harvey Cohn and F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company 1950. 176 p., \$ 2,50.

• Denjoy, Arnaud: *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*. Enseignées à l'Université Harvard. I: La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques. II: Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions. III: Détermination d'une fonction continue par ses nombres dérivés secondes généralisés extrêmes finis. Paris: Gauthier-Villars 1949 (t. I: 1941, Nouveau tirage 1949) 1—84, 85—227, 229—326 p.

Questi tre volumi sono la prima parte di un corso tenuto dall'A. nella Università di Harvard nel 1938—1939, in cui egli ha ripreso una sua ricerca del 1921 rielaborandola completamente. — Sia  $f(x)$  una funzione sviluppabile in serie trigonometrica ovunque convergente, tale cioè



che sussista per ogni  $x$  l'identità

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Un classico risultato di Cantor afferma che i coefficienti della serie (1) sono univocamente determinati. Se la (1) converge uniformemente questi si ottengono subito dalle formule di Eulero-Fourier

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Se la (1) non converge uniformemente e la  $f(x)$  è soltanto integrabile nel senso di Riemann o sommabile secondo Lebesgue è noto (De La Vallée Poussin) che i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  sono ancora espressi dalle (2), dove nei secondi membri è indicata una integrazione nel senso di Riemann o di Lebesgue. Ma vi sono funzioni che sono somme di serie trigonometriche ovunque convergenti e che non sono né sommabili secondo Lebesgue, né totalizzabili nel senso più largo di Denjoy-Perron, cioè che non sono un numero derivato del primo ordine di un'altra funzione. — Il problema qui studiato da A. Denjoy è quello di esprimere i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  della serie (1) mediante la sua somma  $f(x)$ , sotto la sola condizione che la serie (1) sia ovunque convergente. In altre parole si tratta di introdurre un nuovo e più largo concetto di integrale in modo da dare significato alle formule (2) ogni volta che  $f(x)$  sia esprimibile mediante una serie trigonometrica ovunque convergente. — Integrando formalmente due volte termine a termine la (1) si ottengono le serie

$$(3) \quad \frac{1}{2} a_0 x + C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)/n$$

$$(4) \quad \Phi(x) = \frac{1}{4} a_0 x^2 + Cx + C' - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)/n^2$$

di cui la (4) converge uniformemente mentre la (3) può non essere convergente [anche nel caso che lo sia invece la (1)]. La funzione  $\Phi(x)$  è somma di un polinomio di secondo grado e di una funzione continua periodica ed è noto che ha per derivata seconda generalizzata (nel senso di Riemann) la  $f(x)$ . Il problema è così ricondotto a quello di determinare, a partire da una funzione data  $f(x)$ , un'altra funzione  $F(x)$  che abbia  $f(x)$  come derivata seconda generalizzata o anche a determinare la variazione seconda di  $F(x)$ , cioè la stessa  $F(x)$  a meno di una funzione lineare. Infatti se  $f(x)$  è espressa dalla (1) e si sa calcolare la  $F(x)$  è noto che questa coincide a meno di un termine lineare con la  $\Phi(x)$  definita dalla (4) e quindi è la somma di un polinomio di secondo grado e di una funzione periodica  $\varphi(x)$  la cui serie di Fourier converge uniformemente; trovati i coefficienti di Eulero-Fourier  $A_n$  e  $B_n$  della  $\varphi(x)$  si ha  $a_n = -n^2 A_n$ ,  $b_n = -n^2 B_n$  per  $n \geq 1$ , mentre  $a_0$  si determina dal coefficiente di  $x^2$  nel suddetto polinomio di secondo grado. — In tale procedimento la difficoltà maggiore dipende dal fatto che la (3) può non essere convergente e quindi che la  $F(x)$ , pur avendo  $f(x)$  come derivata seconda generalizzata, può non possedere la derivata prima. A. Denjoy ha però dimostrato che la  $F(x)$  possiede quasi ovunque derivata prima  $F'(x)$  e che questa è totalizzabile nel senso di Denjoy-Perron; perciò se partendo dalla  $f(x)$  si sa trovare la  $F'(x)$  si ha un procedimento (la classica totalizzazione di Denjoy-Perron, che l'A. chiama totalizzazione semplice) per risalire alla  $F(x)$ . — Il primo volume dell'opera consta di due capitoli. Nel primo sono esposti, con alcuni complementi, i risultati di De La Vallée Poussin sulla variazione seconda di una funzione e sua relazione con i numeri derivati secondi di misti, giungendo alla dimostrazione delle formule (2) quando  $f(x)$  è sommabile o anche completamente totalizzabile (cioè come derivata — e non numero derivato estremo — di un'altra funzione). Il secondo capitolo studia le proprietà differenziali del primo e secondo ordine della funzione  $\Phi(x)$  definita dalla (4) sia quando la (1) è convergente ovunque sia quando essa è sommabile secondo Cesaro. A questo proposito è da notare che la totalizzazione delle derivate seconde generalizzate, cioè il passaggio dalla  $f(x)$  alla  $F(x)$ , viene applicata dall'A. alla risoluzione del suo problema quando la  $f(x)$  appartiene alla classe (S) delle funzioni sviluppabili in serie trigonometriche ovunque convergenti; ora la classe (S) da un lato contiene funzioni estremamente complicate in quanto non totalizzabili nel senso di Denjoy-Perron, dall'altro non contiene quella delle funzioni continue e periodiche (Du Bois Reymond); questa anomalia dipende dal fatto che la serie (1) è sommata in senso ordinario e tale convenzione influisce sul struttura di (S), mentre l'operazione di totalizzazione che fa passare da  $f(x)$  a  $F(x)$  si può concepire indipendentemente dal modo di sommare la (1). Se ad esempio si considera la classe (S') delle funzioni  $f(x)$  che si ottengono da una serie come la (1) sommandola col procedimento di Cesaro con una condizione atta ad assicurare l'unicità dello sviluppo (1), la (S') contiene le funzioni continue e quelle aventi discontinuità di prima specie. A. Denjoy dimostra che una  $f(x)$  di (S') pur non essendo una derivata seconda generalizzata è sempre una derivata seconda generalizzata approssimativa: questo risultato fa ritenere che la teoria di A. Denjoy possa naturalmente generalizzarsi in modo da comprendere procedimenti di sommazione più generali della serie (1). Anche il secondo volume è diviso in due capitoli; il primo fra questi contiene uno studio delle proprietà geometriche

degli insiemi lineari perfetti; strumenti essenziali sono la nozione di indice di un punto e quella di coefficiente di isolamento di una porzione di insieme perfetto. Di ciò vien fatta applicazione ad ottenere una classificazione degli insiemi perfetti e, nella seconda parte del volume, allo studio della variazione di una funzione continua su un insieme perfetto; si ritrovano qui anche le classiche ricerche di Baire su gli insiemi di seconda categoria e sulle funzioni limiti di funzioni continue su un insieme perfetto. Il terzo volume, pure diviso in due parti, è dedicato al problema (U) di determinare a meno di un termine lineare la funzione continua  $F(x)$  quando sia dato un suo numero derivato secondo generalizzato estremo  $f(x)$  [massimo o minimo limite del rapporto incrementale doppio  $(F(x+u)-2F(x)+F(x-u))/u^2$ ]. Nella prima parte, sotto l'ipotesi che  $|F(x+u)-2F(x)+F(x-u)| \leq \varphi(u)$  con  $\varphi(u) \rightarrow 0$  per  $u \rightarrow 0$ , si studiano le proprietà differenziali del primo ordine della  $F(x)$ ; nella seconda viene risolto il problema (U) quando la  $f(x)$  è data su insiemi particolari, seguendo la classificazione degli insiemi perfetti data nel secondo volume. Il problema generale della determinazione della  $F(x)$  è risolto negli altri due volumi che completano l'opera e che, a causa della guerra, sono usciti solo nel 1949. *Faedo.*

**Renyi, Alfred:** On the summability of Cauchy-Fourier series. Publ. Math., Debrecen 1, 162—164 (1950).

Let  $f(t)$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $f(-t) = -f(t)$ , be a measurable function such that the product  $tf(t)$  is  $L$ -integrable in  $(-\pi, \pi)$ . Let us call (1)  $f(t) \sim \sum b_n \sin nt$  the Cauchy-Fourier series of  $f(t)$ , where the coefficients  $b_n$  are given by the  $L$ -integrals

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

The present paper is a communication that a new proof has been given by the author of the fact, observed first by Titchmarsh [Proc. London math. Soc., II. S. 23, 41—43 (1925)], that the series (1) is (C, 1) summable with sum  $f(t)$  almost everywhere in  $(-\pi, \pi)$ . *L. Cesari (Bologna).*

**Sargent, W. L. C.:** On the summability (C) of allied series and the existence of

$$(CP) - \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt. \text{ Proc. London math. Soc., II. S. 50, 330—348 (1948).}$$

Die Arbeit befaßt sich vorwiegend mit der  $C$ -Summierbarkeit der zur Fourierreihe einer im Cesàro-Perronschen Sinne [vgl. J. C. Burkill, J. London math. Soc. 11, 220—226 (1936); dies. Zbl. 14, 258] integrierbaren Funktion gehörigen konjugierten Reihe. Es sei  $f(t)$  eine mit der Periode  $2\pi$  periodische Funktion, die ein Cesàro-Perron-Integral irgendeiner Ordnung  $\lambda \geq 0$  besitzt. Es bezeichne

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \equiv a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die Fourierreihe von  $f(t)$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$  die dazu konjugierte Reihe an der Stelle  $t = x$ . Setzt man noch  $\psi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) - f(x-t)\}$ , so lassen sich die Hauptresultate wie folgt formulieren: (1) Aus  $(C, \alpha)$ - $\lim_{t \rightarrow +0} \psi(t) = 0$

für ein  $\alpha \geq 0$  und  $(C)$ - $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_t^{\pi} \psi(u) \operatorname{ctg}(u/2) \, du = s$  folgt  $(C, \beta)$ - $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) = s$  für  $\beta > \alpha$  bzw.  $\geq \lambda + 1$ , je nachdem  $\alpha \geq \lambda + 1$  bzw.  $0 \leq \alpha < \lambda + 1$  ist.

(2) Aus  $(C, \beta)$ - $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) = s$  für ein  $\beta \geq -1$  folgt  $(C, \alpha)$ - $\lim_{t \rightarrow +0} \psi(t) = 0$  für

$\alpha > \beta + 1$  und  $(C)$ - $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_t^{\pi} \psi(u) \operatorname{ctg}(u/2) \, du = s$ . (3) Für die  $C$ -Summierbarkeit

(irgendeiner Ordnung) von  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$  zur Summe  $s$  ist notwendig und hinreichend, daß  $\psi(t) \operatorname{ctg}(t/2)$  in  $(0, \pi)$  ein Cesàro-Perron-Integral (irgendeiner Ordnung) besitzt und daß für dasselbe  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg}(t/2) \, dt = s$  gilt. — Entsprechende Sätze bestehen

auch für die Fourierreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ . Sie verallgemeinern bekannte Resultate von



J. C. Burkill [J. London math. Soc. **10**, 254—259 (1935); dies. Zbl. **12**, 403] und L. S. Bosanquet [Proc. London math. Soc., II. S. **46**, 270—289 (1940); dies. Zbl. **25**, 400]. — In Erweiterung eines Resultats von A. Plessner [J. reine angew. Math. **158**, 219—227 (1927)] zeigt Verf. schließlich noch, daß für eine Funktion  $f(t)$ , die in  $(-\pi, 2\pi)$  ein Cesàro-Perron-Integral  $\lambda$ . Ordnung besitzt, auch das Integral

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$
 für fast alle  $x$  des Intervalls  $(0, \pi)$  als ein Cesàro-Perron-Integral

$\lambda$ . Ordnung existiert.

Friedrich Lösch (Stuttgart).

Wintner, Aurel: On absolute Lambert sums. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **8**, 128—132 (1949).

Konvergiert der zu (1)  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  gehörige Abelsche Generator (2)  $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-ns}$  für  $s > 0$ , so konvergiert der Lambertsche Generator von (1)

$$(3) \quad g(s) = \sum_{n=1}^\infty n s a_n e^{-ns} / (1 - e^{-ns})$$

für die nämlichen Werte von  $s$  und umgekehrt. Da für die Abelsche Summierbarkeit von (1) die Existenz von  $\int_{+0} f'(s) ds$  ( $f' = df/ds$ ) notwendig und hinreichend ist, hat Whittaker [Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **2**, 1—5 (1930/31)] die Reihe (1) absolut  $A$ -summierbar bezeichnet, sobald  $\int_{+0} |df(s)| < \infty$  ist. Analog ist die Existenz von  $\int_{+0} g'(s) ds$  notwendig und hinreichend für die Lambertsche Summierbarkeit von (1), und (1) heißt absolut  $L$ -summierbar, wenn  $\int_{+0} |dg(s)| < \infty$ .

— Bedeutet  $M \rightarrow N$ , daß jede  $M$ -summierbare Reihe auch  $N$ -summierbar ist, so sind  $|A| \rightarrow A$  und  $|L| \rightarrow L$  trivial, nicht aber  $|L| \rightarrow |A| \rightarrow L \rightarrow A$ , wobei  $|A|$  absolute  $A$ - und  $|L|$  absolute  $L$ -Summierbarkeit bedeutet. Verf. beweist in der vorliegenden Note  $|L| \rightarrow |A|$ . Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis für  $L \rightarrow A$  von Hardy und Littlewood [Proc. London math. Soc., II. S. **19**, 21—29 (1921)]. Bereits in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **34**, 40) hat Verf.  $|A| \rightarrow L$  bewiesen.

Lammel (Tucumán).

Nikol'skij, S.: Zur Dini-Lipschitzschen Bedingung für die Konvergenz einer Fourierreihe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 457—460 (1950) [Russisch].

Es sei  $\omega(t)$  eine für  $t > 0$  definierte, reelle, nichtabnehmende Funktion, für die  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$  und  $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$  (Subadditivität) gilt. Bedeute  $H_\omega$  die Klasse aller nach  $2\pi$  periodischer Funktionen  $f(x)$ , deren Stetigkeitsmodul durch  $\omega(t)$  majorisiert wird, d. h. für die  $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ . — Die Dini-Lipschitzsche Bedingung

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) \log 1/t = 0$$

sichert bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihen aller Funktionen  $f(x) \in H_\omega$ . Verf. zeigt, daß die Bedingung auch notwendig ist. Er zeigt nämlich, daß, wenn (1) nicht gilt, dann eine Funktion  $f(x) \in H_\omega$  existiert, deren Fourierreihe in einem Punkte divergiert. Wenn also die Fourierreihen aller in der Klasse  $H_\omega$  enthaltenen Funktionen in jedem Punkte konvergieren, dann konvergieren sie sogar alle gleichmäßig auf  $(-\infty, \infty)$ . — Im Beweise macht der Verf. von seinen folgenden früheren Resultaten Gebrauch [vgl. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **52**, 191—194 (1946)]: 1. Für jede  $f(x) \in H_\omega$  gilt:

$$|f(x) - s_n(t, x)| \leq R_n + O(\omega(h^{(n)})).$$

wo

$$R_n = \frac{2 \log n}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z \, dz, \quad h^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1},$$

und wo  $s_n(f, x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe von  $f(x)$  bedeutet. 2. Es gibt Funktionen  $f_n(x) \in H_\omega$ , so daß

$$f_n(0) - s_n(f_n, 0) = \frac{1}{2} R_n + O(\omega(h^{(n)}))$$

(im Falle, daß  $\omega(t)$  konvex ist, können die  $f_n(x)$  sogar so gewählt werden, daß rechts  $R_n$  statt  $\frac{1}{2} R_n$  steht).

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Nikol'skij, S. M.: Zur Frage der Abschätzungen von Annäherungen durch Quadraturformeln. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 165—177 (1950) [Russisch].

Verf. denkt sich die „Güte“ einer Quadraturformel durch den Ausdruck

$$E_n(H; p_k, x_k) = \sup_{f \in H} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n p_k f(x_k) \right|$$

charakterisiert. Darin ist  $H$  eine gegebene Klasse im Intervall  $(a, b)$  erklärter Funktionen. Er bestimmt im § 1 für einige Quadraturformeln, z. B. die Trapezformel ( $p_0 = p_n = \frac{1}{2}$ ,  $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 1$ ;  $x_k = k/n$ ) und die Simpsonsche Formel ( $n = 2m$ ,  $3n p_k / (b-a) = 1, 4, 2, 4, \dots, 4, 2, 1$ ;  $x_k = k/n$ ), die Zahlenwerte von  $E_n$  und die dazu gehörenden Grenzfunktionen unter der Voraussetzung, daß  $H$  die Klasse der Funktionen mit in  $(a, b)$  beschränkter  $r$ -ter Ableitung ist. Im § 2 wird eine von Kolmogoroff stammende Aufgabe behandelt, die gewissermaßen die Umkehrung der ersten darstellt: es sollen die Parameter  $p_k$  und  $x_k$  der Quadraturformel so bestimmt werden, daß  $E_n$  für eine gegebene Funktionsklasse möglichst klein wird. Verf. gibt die Lösung für diejenigen Funktionen, die eine beschränkte zweite Ableitung haben. Im letzten Paragraphen wird die Problemstellung verallgemeinert. Verf. setzt hier eine Formel der Gestalt

$$\int_0^1 f(x) dx \sim \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_k^{(i)} (r-i-1)! f^{(i)}(x_k)$$

an und bestimmt diejenigen Werte  $\lambda_k^{(i)}$  und  $x_k$ , für die die Formel bei vorgegebenem Typ, d. h. gegebenem  $n$  und  $r$ , möglichst gut ist; zur Konkurrenz sind alle Funktionen mit  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$  und  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0$  zugelassen. Die  $\lambda_k^{(i)}$  lassen sich dabei mit Hilfe eines einfach gebildeten trigonometrischen Polynoms in geschlossener Form darstellen.

W. Hahn (Berlin).

Nikol'skij, S. M.: Über die beste Annäherung differenzierbarer nichtperiodischer Funktionen durch Polynome. Acta Sci. math., Szeged 12 A, J. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 185—197 (1950) [Russisch].

Es sei, wie üblich,  $E_n(f) = \min_{P_n-1 \leq x \leq +1} |f(x) - P_n(x)|$  die beste Annäherung“ von  $f(x)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades. S. Bernstein hat gezeigt [Acta math. 37, 1—57 (1913); Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 1938, 169—180. 1. Es existiert  $\lim n^s E_n(|x|^s) = \mu(s)$ . 2. Wenn  $f(x)$  die Darstellung

$$\sum_{k=1}^m a_k |x - x_k|^s + \varphi(x)$$

zuläßt, wobei  $\varphi(x)$  in  $(-1, +1)$  überall eine stetige Ableitung  $s$ -ter Ordnung hat, so gilt asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$

$$E_n(f) \sim n^{-s} \kappa \mu(s); \quad \kappa = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| |1 - a_k^2|^{s/2}.$$

Verf. verallgemeinert diese Ergebnisse. Er setzt voraus, daß die ersten  $s-1$  Ableitungen von  $f(x)$  absolut stetig sind, während  $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$  endlich bleibt und als Unstetigkeiten nur Sprünge, aber auch wirklich mindestens einen Sprung aufweist. Dann gilt für ungerades  $s$

$$E_n(f) = k \mu(s) / 2s! n^s; \quad k = \max_{-1 \leq x \leq +1} |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)| (1-x^2)^{s/2},$$

bei geradem  $s$  ist  $\mu(s)$  durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^s E_n(|x|^{s-1})$  zu ersetzen. Ein ähnlicher Satz



besteht für die Annäherung im Mittel. Es ist

$$E_n(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)| dx \sim (M_s/n^{s+1} 2s!) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k^2)^{(s+1)/2} |A_k|;$$

dabei sind die  $a_k$  die höchstens abzählbar unendlich vielen Sprungstellen,  $A_k$  die Sprunghöhen,  $M_s = s! 8\pi^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} / (2\nu+1)^{s+2}$ . Weiter beschäftigt sich Verf. mit

der „linearen Methode der Annäherung“. Es sei  $W_{s-1}$  die Klasse der Funktionen, die in  $(-1, +1)$  absolut stetige Ableitungen  $(s-2)$ -ter Ordnung haben und eine Ableitung  $(s-1)$ -ter Ordnung, deren Variation höchstens 1 ist (var  $f^{(s-1)}(x) \leq 1$ ).

Man kann dann zunächst zeigen, daß  $E_n(W_{s-1})_L$  durch  $E_n(|x|^{s-1})_L$  asymptotisch ausgedrückt werden kann. Es sei nun  $P_n^{(s)}(x, a)$  das Polynom bester Annäherung in  $(-1, +1)$  für  $|a-x|^{s-1}$  bzw.  $(a-x)|a-x|^{s-1}$ , wenn  $s$  ungerade ist, und

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{s-1} (x+1)^k f^{(k)}(-1)/k! + \frac{1}{2(s-1)!} \int_{-1}^{+1} ((x-t)^{s-1} + P_n^{(s)}(x, t)) d\varphi(t) \quad [\varphi(t) = f^{(s-1)}(t)]$$

die „lineare Methode der Annäherung“ der Funktion  $f(x)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades. Dann gilt der bemerkenswerte Satz

$$\sup_{f \in W_{s-1}} \int_{-1}^{+1} |f(x) - U_n(f, x)| dx = E_n(W_{s-1})_L$$

d. h. also, daß die „lineare Methode der Annäherung“ zu dem gleichen Ergebnis führt wie die „Annäherung im Mittel“. — Einige Ergebnisse der Arbeit hat Verf. schon in vorläufigen Mitteilungen veröffentlicht (dies. Zbl. 29, 121, 122; 33, 357; 34, 39).

W. Hahn (Berlin).  
Mergeljan, S. P.: Über die besten Annäherungen im Komplexen. Acta Sci. math., Szeged 12 A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 198—212 (1950) [Russisch].

In der Theorie der „besten Annäherung im Komplexen“ hat man es mit einer Funktion  $f(z)$  zu tun, die in einem Gebiet  $D$  erklärt ist, und betrachtet den Ausdruck  $\varrho_n(f, D) = \max_{z \in D} |f(z) - P_n(z)|$ , gebildet mit allen möglichen Polynomen  $P_n(z)$  des Grades  $n$ . Macht man über  $D$ , insbesondere über die Berandung, gewisse Voraussetzungen, so kann das Maß der Geschwindigkeit, mit der  $\varrho_n(f, D)$  bei wachsendem  $n$  gegen Null strebt, zur Charakterisierung von Funktionsklassen dienen. Z. B. zeigt Verf.: Ist  $D$  durch glatte Kurven mit stetiger Tangente begrenzt, ist  $f(z)$  in  $D$  regulär und in dem durch Hinzunahme des Randes entstehenden abgeschlossenen Gebiet  $\bar{D}$  stetig, und genügt  $f^{(k)}(z)$  in  $\bar{D}$  einer Lipschitzbedingung der Ordnung  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), so ist für beliebiges  $\varepsilon > 0$  bei hinreichend großem  $n > n_0(\varepsilon)$   $\varrho_n(f, D) < C/n^{k+\alpha-\varepsilon}$ ;  $C$  ist von  $n$  unabhängig. — Schärfere Voraussetzungen über den Rand bringen weitergehende Aussagen. — Verf. zeigt ferner, daß man auch in umgekehrter Richtung schließen kann: schreibt man die Geschwindigkeit vor, mit der  $\varrho_n(f, D)$  gegen Null strebt, so läßt sich schließen, daß  $f(z)$  einer Lipschitzbedingung genügt. In dem bewiesenen Satz wird  $\varrho_n(f, D)$  mit der Verzerrung verglichen, die der Kreis  $|w| = 1 + 1/n$  bei einer konformen Abbildung erleidet, die das Gebiet  $|w| > 1$  in das zu  $D$  komplementäre Gebiet der Ebene überführt.

W. Hahn (Berlin).  
Wright, E. M. and Barbara G. Yates: The asymptotic expansion of a certain integral. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) 1, 41—53 (1950).

The authors give the asymptotic expansion for large positive  $y$  of the integral

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C u^{-\beta} \exp \left\{ y u + A u^{-\varepsilon} \left( 1 + \sum_{l=1}^L A_l u^{\sigma_l} \right) \right\} du.$$

where  $C$  starts from  $-\infty$  on the real axis of the complex  $u$ -plane, encircles the origin once counter-clockwise and returns to  $-\infty$ ,  $L$  is any positive integer,  $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_L < 1 + \varrho$ ,  $\sigma_l \neq \varrho$  ( $1 \leq l \leq L$ ), and  $A, A_1, \dots, A_L, \beta$  are any complex numbers,  $A \neq 0$ . Write  $\tau = 1/\varrho + 1$ ,  $Y = (y/\varrho A)^\tau$ ,  $\alpha' = \arg(-A)$  ( $-\pi \leq \alpha' < \pi$ ),  $b_l = (\varrho - \sigma_l) A_l/\varrho$ ,  $\vartheta_0 = \sum_{l=1}^L b_l Y^{-\sigma_l}$  and, for  $s \geq 2$ ,

$$D_s = \frac{(-1)^{s-1} A \varrho \tau}{s!} \frac{d^{s-2}}{dy^{s-2}} (y^{s-2} Y^\varrho \vartheta_0^s).$$

Define

$$\Omega(Y) = A(1 + \varrho) Y^\varrho + A \sum_{l=1}^L A_l Y^{\varrho - \sigma_l} + \sum_{s=2}^{\infty} D_s.$$

We have  $\psi(y) = H(Y') + H(Y'')$ , where

$$H(Y) = \frac{Y^{\beta - \frac{1}{2}} e^{\Omega(Y)}}{\sqrt{2\pi y(\varrho + 1)}} \{1 + O(y^{-K})\}$$

the square root in the denominator being positive, and  $Y', Y''$  are the particular values of  $Y$  for which  $\arg Y' = -\alpha' \tau - \pi \tau$ ,  $\arg Y'' = -\alpha' \tau + \pi \tau$ . — This result has been used in a paper of Wright (this Zbl. 34, 342). Horváth (Paris).

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

Sandham, H. F.: A logarithmic transcendental. J. London math. Soc. 24, 83—91 (1949).

Verf. behandelt die Funktion  $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^3$ , die, wie  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ , schon von klassischen Urhebern untersucht worden ist ( $-1 \leq x \leq 1$ ). Setzt man, bei reellen  $w$  unter  $\log w$  die Größe  $\Re \ln w$  verstehend,

$$\mu(x) = \int_0^x \log^2(1-t) d \log t, \quad M(x) = \mu(x) - \frac{1}{3} \log x \log^2(1-x),$$

$$L(x) = - \int_0^x \log(1-t) d \log t + \frac{1}{2} \log x \log(1-x),$$

so läßt sich die Erklärung von  $\psi(x)$  durch den in  $(-1, 1)$  gültigen Ansatz

$$\mu(1-x) = 2\psi(1) - 2\psi(x) + 2L(x) \log x$$

in das Gebiet außerhalb  $(-1, 1)$  fortsetzen. — W. Spence („An essay on the theory of the various orders of logarithmic transcendents“, London 1809) und S. Ramanujan (Collected papers, Cambridge 1927, p. 337, XXV) gaben eine lineare Beziehung zwischen drei, von einem Parameter abhängigen Funktionen  $\psi$  an. Einen Zusammenhang zwischen 9, von 2 Parametern abhängigen Funktionen  $\psi$  entdeckte E. E. Kummer [J. reine angew. Math. 21, 76—90, 193—225, 328—371 (1840)]. Hauptziel der vorliegenden Arbeit, in der Verf. die Ergebnisse seiner Vorgänger nochmals gewinnt, ist eine neue Beziehung zwischen  $n^3 + 1 + n(n-1)/2$  Funktionen  $\psi$ , die von  $n$  Parametern ( $n > 1$ ) abhängen; sie entspricht dem von L. J. Rogers [Proc. London math. Soc., II. S. 4, 169—189 (1907)] zwischen  $n^2 + 1$  Funktionen  $\varphi$  mit  $n$  Parametern gefundenen Zusammenhang. Verf. zeigt zunächst, daß ein solcher zustande kommt, wenn sich  $\int \log(1-\alpha x) \log(1-\beta x) d \log x$  durch  $\int \log^2(1-x) d \log x$  ausdrücken läßt. Das trifft auf die Verbindung

$$d \left[ \mu(\alpha x) + \mu(\beta x) + \mu \left( \frac{x-\beta}{\alpha(1-\beta x)} \right) - \mu \left( \frac{x(\alpha-\beta)}{1-\beta x} \right) \right] + d \left[ \log^2 \frac{\beta}{\alpha} \log(1-\beta x) \right. \\ \left. - \log \frac{\beta}{\alpha} \log^2 \left( \frac{\beta(1-\beta x)}{\beta-x} \right) - 2 \log \frac{\beta}{\alpha} \varphi \left( \frac{x(1-\beta x)}{x-\beta} \right) \right] = 2 \log(1-\alpha x) \log(1-\beta x) d \log x$$



zu; hierauf gestützt, gelangt Verf. zu folgender Aussage: Es sei  $\prod_m^{1,n} (1 - \lambda_m x) = y$  bei reellen  $\lambda_m$  eine Gleichung in  $x$  mit so kleiner rechter Seite  $y$ , daß ihre Wurzeln  $x_m$  sämtlich reell sind; dann gilt

$$\frac{1}{2} \sum \left[ M(\alpha x) + M(\beta x) + M\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha(1 - \beta x)}\right) - M\left(\frac{x(\alpha - \beta)}{1 - \beta x}\right) \right] - M(1 - y) \\ = (n^3 - 1) M(1) - \frac{1}{2} n \sum M\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

wo bei der Summierung  $\alpha, \beta$  alle Werte  $\lambda_m$  und  $x$  alle Werte  $x_m$  annehmen. Verf. schließt mit dem Sonderfalle  $n = 2$ , der von seiner ihm von Kummer gegebenen Gestalt nur äußerlich abweicht.

L. Koschmieder (Tucumán).

Jackson, M.: On Lerch's transcendent and the basic bilateral hypergeometric series  ${}_2\Psi_2$ . J. London math. Soc. 25, 189—196 (1950).

Verf. leitet unter Benutzung noch unveröffentlichter Resultate von Bailey einige interessante Formeln für die Lerchsche Transzendente

$$f(x, \xi; p, q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{n^2} x^{2n} (1 + q \xi^2) (1 + q^2 \xi^2) \cdots (1 + q^{2n-1} \xi^2) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} x^{-2n}}{(1 + q^{-1} \xi^2) \cdots (1 + q^{1-2n} \xi^2)}$$

ab, nämlich eine Darstellung von  $f(x, \xi; q, q)$  mittels  $\theta$ -Funktionen [Formel (2.7) enthält einen kleinen Druckfehler], ferner die Transformationsformel

$$f(x, \xi; q, q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + x^2 q^{2n-1}}{1 + \xi^{-2} q^{2n-1}} \quad f(\xi^{-1}, x^{-1}; q, q)$$

und die Faktorenerlegung

$$f(x, \xi; 1, q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \xi^{-2} x^{-2} q^{2n+1}) (1 + x^2 \xi^2 q^{2n+1}) (1 - q^{2n+2})}{(1 + \xi^{-2} q^{2n+1}) (1 + x^2 q^{2n})}$$

[Die letzte Beziehung ist übrigens ein Spezialfall einer vom Ref. auf anderem Wege bewiesenen Formel; vgl. (4.7) der in dies. Zbl. 33, 57 besprochenen Arbeit.] Hahn.

Jackson, M.: A generalization of the theorems of Watson and Whipple on the sum of the series  ${}_3F_2$ . J. London math. Soc. 24, 238—240 (1949).

Wenn  $\Re(e + f + g - a - b - c - d) > 0$ , strebt das längs eines geeignet geführten Kreises von großem Halbmesser  $R$  gebildete Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(-s) \Gamma(b+s) \Gamma(c+s) \Gamma(d+s)}{\Gamma(1-a-s) \Gamma(e+s) \Gamma(f+s) \Gamma(g+s)} ds$$

mit  $R \rightarrow \infty$  gegen 0. Durch Ermittlung der Residuen erhält Verf. die Beziehung

$$\frac{\Gamma(b) \Gamma(c) \Gamma(d)}{\Gamma(1-a) \Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(g)} \times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c, d; \\ e, f, g \end{matrix} \right] \\ = \sum_{b, c, d} \frac{\Gamma(b) \Gamma(c-b) \Gamma(d-b)}{\Gamma(1-a+b) \Gamma(e-b) \Gamma(f-b) \Gamma(g-b)} \times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} b, 1+b-e, 1+b-f, 1+b-g; \\ 1+b-c, 1+b-d, 1+b-a \end{matrix} \right].$$

Für  $d = 1$  geht daraus eine Formel für eine zweiseitige hypergeometrische Reihe  ${}_3H_3$  hervor, die diese durch zwei Reihen  ${}_3F_2$  ausdrückt, nämlich

$${}_3H_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c; \\ e, f, g \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(g) \Gamma(1-a) \Gamma(1-b) \Gamma(c-b)}{\Gamma(e-b) \Gamma(f-b) \Gamma(g-b) \Gamma(c) \Gamma(1+b-a)} \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1+b-e, 1+b-f, 1+b-g; \\ 1+b-c, 1+b-a \end{matrix} \right] + (b \rightleftharpoons c);$$

der Doppelpfeil rechts besagt, daß dort ein zweites Glied auftritt, das aus dem ersten durch Vertauschung von  $b$  und  $c$  entsteht. Wenn  $e + f = 2a + 1$ ,  $2g = b + c + 1$ , so lassen sich die beiden Reihen rechts nach einer Formel  $\mathfrak{B}$  von Watson [Proc.

London math. Soc., II. S. 23, XIII—XV (1925)] summieren, und es ergibt sich

$${}_3H_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c; \\ e, f, g \end{matrix} \right] = [\sin a \pi \cos \tfrac{1}{2} (b - c) \pi + \sin (e - a) \pi \cos \tfrac{1}{2} (b + c) \pi] \\ \times \frac{2^{b+c-2a} \Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(g) \Gamma(1-a) \Gamma(1-b) \Gamma(1-c) \Gamma(\tfrac{1}{2} + a - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} c)}{\pi \Gamma(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{2} b) \Gamma(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{2} c) \Gamma(1 + a - \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{2} b) \Gamma(1 + a - \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{2} c)}.$$

Ist  $e$  (oder  $f$ ) = 1, so entsteht  $\mathfrak{B}$ ; ist  $g$  = 1, so erhält man eine Formel von Whipple (ebd., 104—114).

L. Koschmieder (Tucumán).

Toscana, Letterio: Osservazioni su particolari funzioni di Kummer. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 274—278 (1949).

Verf. untersucht Kummers ausgeartete hypergeometrische Funktion (K. F.)

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha, i)}{(\gamma, i)} \frac{x^i}{i!}, \quad (\alpha, i) = \frac{\Gamma(\alpha + i)}{\Gamma(\alpha)}, \quad |x| < 1$$

für die besonderen Parameterwerte  $\alpha = -n$ ,  $\gamma = -kn$ , wo  $n$  und  $k$  natürliche Zahlen bedeuten. Durch Aufspaltung der Reihe auf die Spielräume  $(0, n)$ ;  $(n+1, kn)$ ;  $(kn+1, \infty)$  des Zeigers  $i$  findet er mit dem bekannten Zeichen  $L_n^{(\beta)}$  der Laguerreschen Polynome

$$(-1)^n k n! [(k-1)n]! (kn+1)! L_n^{(-kn-1)}(x) = k(kn)! (kn+1)! {}_1F_1(-n, -kn; x) \\ + (-1)^{(k-1)n+1} n! [(k-1)n]! x^{kn+1} {}_1F_1\{(k-1)n+1, kn+2; x\}.$$

In dem Sonderfalle  $k=2$  haben die beiden K. F. ihren zweiten Parameter doppelt so groß wie den ersten und drücken sich daher nach einer Kummerschen Formel durch Funktionen  ${}_0F_1$ , d. h. durch Besselsche (B. F.) aus; mit  $\varepsilon^2 = -1$  ergibt sich

$$(\mathfrak{I}) (-1)^n n! (2\varepsilon x)^{-n} L_n^{(-2n-1)}(2\varepsilon x) = \varepsilon^{-n-1} e^{\varepsilon x} \sqrt{\pi x/2} \{J_{n+\frac{1}{2}}(x) + \varepsilon (-1)^n J_{-n-\frac{1}{2}}(x)\}.$$

$\mathfrak{I}$  begegnet in anderer Gestalt  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{B}$  in Arbeiten von H. E. J. Curzon [Proc. London math. Soc., II. S. 13, 417—440 (1914)] und P. G. Bordoni [Pontif. Accad. Sci. Comm. 9, n. 3 (1945)]: Verf. erweist die inhaltliche Übereinstimmung von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{I}$  mit Hilfe seiner Formel

$${}_2F_0(-n, \beta; x) = (\beta, n) (-x)^n {}_1F_1(-n, -n-\beta+1; -x^{-1}).$$

Diese benutzt er weiter dazu, die Gleichwertigkeit gewisser äußerlich verschiedener Darstellungen [z. B. des Malwertes  $L_n^{(\beta)}(x) L_n^{(\beta)}(-x)$ ] darzutun, wie sie aus zwei Ausdrücken des Malwertes zweier B. F. oder K. F. durch je eine dritte (verallgemeinerte) hypergeometrische Funktion hervorgehen [vgl. W. N. Bailey, Proc. London math. Soc., II. S. 28, 242—254 (1928)]. — In der ersten Zeile der Formel (9) lies am Ende  $4/x^2$  statt  $4/x$ .

L. Koschmieder (Tucumán).

Karlin, Meyer: Note on the expansion of confluent hypergeometric functions in terms of Bessel functions of integral order. J. Math. Phys., Massachusetts 28, 43—44 (1949).

Das Computation Laboratory of the National Bureau of Standards hat die Kummersche Funktion  $F(n/2, 1/2; x)$  vertafelt (dies. Zbl. 35, 79). Abweichend von den dort benutzten Verfahren entwickelt Verf. sie allgemein nach Besselschen Funktionen  $I_k$  ganzer Ordnung,

$$(*) \quad F(\alpha, \gamma; x) = \sum_k \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma+k)} \frac{x^k}{k!} = \sum_k c_k I_k(x),$$

und findet mit Hilfe der Formeln

$$F'(\alpha, \gamma; x) = (\alpha/\gamma) F(\alpha+1, \gamma+1; x), \quad 2I'_k(x) = I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x), \quad I'_0(x) = I_1(x)$$

die doppelte Entwicklung

$$(**) \quad \frac{\alpha}{\gamma} I_0(x) + I_1(x) + \frac{\alpha}{\gamma} I_2(x) + \frac{1}{2} \sum_k^{2, \infty} c_k [I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)] \\ = \frac{\alpha}{\gamma} I_0(x) + 2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} I_1(x) + \frac{\alpha}{\gamma} \sum_k^{2, \infty} d_k I_k(x);$$



dabei entstehen die  $d_k$  aus den  $c_k$ , indem man in diesen  $\alpha, \gamma$  durch  $\alpha + 1, \gamma + 1$  ersetzt. Der Vergleich der Vorzeichen von  $I_k(x)$  auf beiden Seiten von (\*\*) liefert die Rücklaufsformeln zur Berechnung der  $c_k$ . Verf. treibt die letzte Reihe in (\*) bis zum achten Gliede und findet den Zahlenwert  $F(20.5, 1/2; 0.2)$  mit einer Genauigkeit, zu der in der Potenzreihe Hunderte von Gliedern nötig wären.

L. Koschmieder (Tucumán).

**Meijer, C. S.: Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen.** Compositio math., Groningen 8, 49—60 (1950).

Verf. schafft sich sein Hilfsmittel in der Funktion

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = \sum_h^{1,m} \prod_{j \neq h}^{1,m} \Gamma(b_j - b_h) \left[ \prod_j^{m+1,4} \Gamma(1 + b_h - b_j) \right]^{-1} \zeta^{\pm b_h} \\ \cdot {}_0F_3 [1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_4; (-1)^m \zeta^4] \quad (m = 1, 2, 3, 4),$$

in der  $\zeta \neq 0$  und  $b_j - b_h$  unganzzahlig vorausgesetzt werde ( $j, h = 1, \dots, m; j \neq h$ ); der Stern deutet an, daß unter den Zahlen  $B_{hh} = 1 + b_h - b_l$  ( $l = 1, \dots, 4$ ) der Wert  $B_{hh} = 1$  auszulassen ist.  $T_m$  ist Sonderfall der vom Verf. früher (s. dies.

Zbl. 13, 208) eingeführten Funktion  $G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \middle| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right)$ , nämlich

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = G_{0,4}^{m,0} (\zeta^4 | b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Mit dieser Funktion gewinnt Verf. die Integraldarstellung

$$(*) \quad K_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-2} e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}z u e^{-\pi i/4}) u^{3-2\alpha-2\beta} du,$$

in der  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \pi/4$  und  $\nu$  unganzzahlig angenommen wird;  $\alpha, \beta$  sind beliebige Werte derart, daß  $\alpha - \beta$ ,  $\alpha \pm \nu/2$ ,  $\beta \pm \nu/2$  unganzzahlig sind. Der Integrationsweg  $L$  besteht aus der imaginären Achse von  $\infty e^{\pi i/2}$  bis  $\delta e^{\pi i/2}$  ( $\delta > 0$ ), dem von dort bis  $\delta$  durchlaufenen Viertelkreis mit der Mitte  $u = 0$  und dem Halbmesser  $\delta$ , und der positiven reellen Achse von  $\delta$  bis  $\infty$ . Eine zu manchem Gebrauche bequemere Formel entsteht, wenn man  $u$  durch  $u \exp(\pi i/4)$  ersetzt. — Von den beiden entsprechenden Integraldarstellungen der Funktion  $J_\nu(z^2)$  lautet die erste

$$J_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-1} e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) T_3(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}z u e^{-\pi i/4}) u^{3-2\alpha-2\beta} du.$$

Zu  $Y_\nu(z^2)$  kann man an Hand der bekannten Ausdrücke dieser Funktion durch  $J_\nu$  und  $J_{-\nu}$  oder durch  $K_\nu$  übergehen; man findet dann

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{2^{\alpha+\beta-2} e^{\beta\pi i}}{\pi^2 i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) \{ e^{\nu\pi i/2} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}z u) \\ + e^{-\nu\pi i/2} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}z u e^{-\pi i/4}) \} u^{3-2\alpha-2\beta} du.$$

Dabei ist  $z > 0$  anzunehmen; von  $\nu, \alpha, \beta$  gilt das im Anschluß an (\*) Gesagte mit dem Zusatz  $\Re(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}$ . — Verf. schließt mit Sonderfällen wie  $\alpha = (1 + \nu)/2$ ,  $\beta = (1 - \nu)/2$ ; auf ihre Wiedergabe muß hier trotz Neuheit und Reichweite der Ergebnisse verzichtet werden, von denen besonders auf die Formeln für die nach dieser Hinsicht nur spärlich behandelte Funktion  $Y_\nu(z^2)$  hingewiesen sei.

L. Koschmieder (Tucumán).

**Šura-Bura, M. R.: Berechnung eines Integrals, das ein Produkt von Besselschen Funktionen enthält.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 901—903 (1950) [Russisch].

Verf. berechnet die in der Strömungstheorie (vgl. A. Weinstein; dies. Zbl. 29, 174) auftretende Laplacetransformierte des Produktes  $J_0(bt) J_1(ct)$ , indem er  $J_0(bt)$  als bestimmtes Integral schreibt und das Doppelintegral umordnet. Er findet

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) J_1(ct) dt = \frac{4a^2}{\pi \sqrt{x_1(x_2 + 2a^2)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 - p \sin \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

mit  $x_{1,2} = \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2 c^2} \pm (a^2 + b^2 - c^2)$ ;  $p = \frac{x_1 - 2a^2}{x_1}$ ,  $k^2 = p \frac{x_2}{x_2 + 2a^2}$ .  
Das Integral rechts ist tabelliert bei C. Neumann, J. Math. Phys., Massachusetts 20 (1941).  
W. Hahn (Berlin).

Mitra, S. C. and A. Sharma: On a generalisation of Weber's parabolic cylinder functions. Proc. Benares math. Soc., n. S. 9, 25—31 (1947).

Bezeichnet  $D_{(k)}^{(k)}$  den Operator  $\frac{d}{dy} \frac{1}{y^{k-2}} \frac{d}{dy}$  und  $D_{(k)}^{(kn)}$  die  $n$ -malige Anwendung des Operators  $D_{(k)}^{(k)}$ , so hat man für die verallgemeinerten Weberschen Funktionen des parabolischen Zylinders die Definition:

$$\bar{D}_{kn}(y) = (-1)^{kn} e^{y^{k/2k}} D_{(k)}^{(kn)}(e^{-y^{k/2k}})$$

$$\bar{D}_{kn+1}(y) = (-1)^{kn+1} e^{y^{k/2k}} D_{(k)}^{(kn+k-1)}(e^{-y^{k/2k}}),$$

wo  $D_{(k)}^{(kn+1)} = \frac{d}{dy} D_{(k)}^{(kn)}$  gesetzt ist. Es ergibt sich die Darstellung:

$$\bar{D}_{kn}(y) = (-1)^n k^n \frac{\Gamma(n+1/k)}{\Gamma(1/k)} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{k}; \frac{y^k}{k}\right) e^{-y^{k/2k}},$$

$$\bar{D}_{kn+1}(y) = (-1)^n k^{n+1} \frac{\Gamma(n+1+1/k)}{\Gamma(1+1/k)} {}_1F_1\left(-n; 1 + \frac{1}{k}; \frac{y^k}{k}\right) e^{-y^{k/2k}}.$$

Für diese Funktionen, die für  $k=2$  in die Weberschen Funktionen des parabolischen Zylinders übergehen, werden die Differentialgleichung, Rekursionsformeln und Integraleigenschaften abgeleitet.  
Volk (Würzburg).

Srivastava, V. N. L.: On generalised Legendre polynomials. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 25—30 (1950).

Für die verallgemeinerten Legendreschen Polynome

$Q_{km}(y) = {}_2F_1(-m, m+1/k; 1; 1-y^k)$ ,  $Q_{km+1}(y) = y {}_2F_1(-m, m+1/k+1; 1; 1-y^k)$ , die für  $k=2$  die gewöhnlichen Polynome ergeben, werden Integrale von der Form

$$\int_0^1 y^{k\tau} Q_{km+\varepsilon}(y) dy, \int_0^1 (1 \pm y^k)^p Q_{km+\varepsilon}(y) dy \quad (\varepsilon = 0, 1); \int_0^1 e^{-zy^k} Q_{km}(y) dy, \\ \int_0^1 e^{-zy^k} y^{kp} Q_{km+1}(y) dy, \int_0^1 y^{k\tau} Q_{km}(y) Q_{kn}(y) dy, \int_0^1 y^{(k-1)/2} J_{1/k-1}(2y^{k/2}t) Q_{km}(y) dy$$

u. a. bestimmt sowie einige Integral- und andere Darstellungen abgeleitet. Volk.

Bagechi, Haridas and Nalinikanta Chakrabarti: Note on Laguerre's polynomial  $L_n(z)$  and its associated equations (functional and differential). Bull. Calcutta math. Soc. 42, 17—24 (1950).

Sind die Funktionen  $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z), f_{n+1}(z), \dots$  Lösungen der beiden Funktionalgleichungen

$$(1) f_{n+1}(z) + (2n+1-z)f_n(z) + n^2 f_{n-1}(z) = 0, \quad (2) f'_n(z) = n(f'_{n-1}(z) - f_{n-1}(z)), n \geq 1,$$

so sind sie auch Lösungen der Differentialgleichung

$$(3) z f''_n(z) + (1-z) f'_n(z) + n f_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ist nun  $f_n(z)$  eine beliebige Lösung von (3), so ergibt sich aus (2)

$$f_{n-1}(z) = n^{-1}(f_n(z) + e^z \int e^{-z} f_n(z) dz + c e^z),$$

wo  $c$  eine durch die Wahl von  $f_n(z)$  bestimmte Konstante ist; aus (1) und (2) folgen dann die übrigen Funktionen ohne Integrationen; die Funktionenreihe  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  ist im übrigen nichts anderes als die Funktionenreihe  $c_1 L_n(z) + c_2 M_n(z)$ , wenn  $L_n(z)$  die Laguerreschen Polynome und  $M_n(z)$  die Laguerreschen Funktionen zweiter Art sind, also  $c_1 L_n(z) + c_2 M_n(z)$  das allgemeine Integral von (3) darstellt (vgl. Ref., Über die Entwicklung komplexer Funktionen nach der Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. Mém. Fac. Sci. Univ. Lithuanie, Kaunas 1923, 3—33). Im zweiten Teile wird eine erzeugende Funktion für die Lösungen der Funktional-



gleichung (1) für  $n = 1, 2, 3, \dots$  angegeben und die Beziehung nachgewiesen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{(f_1(z) - (1-z)f_0(z)) \left( \int (1-h) e^{z/(1-h)} dh + \psi(z) \right)}{(1-h) e^{z/(1-h)}},$$

gültig für alle endlichen  $z$  in der  $z$ -Ebene,  $|h| = 1$ ;  $\psi(z)$  ist durch die Wahl von  $f_0(z)$ ,  $f_1(z)$  festgelegt. Volk (Würzburg).

**Bagehi, Haridas and Nalinikanta Chakrabarti:** Note on a triad of functional equations connected with the Laguerre's polynomial  $L_n(z)$ . Bull. Calcutta math. Soc. 42, 57—60 (1950).

Beweis dafür, daß aus je zweien der vier Beziehungen

$$f'_n(z) = n(f'_{n-1}(z) - f_{n-1}(z)), \quad f_{n+1}(z) - (2n+1-z)f_n(z) + n^2 f_{n-1}(z) = 0,$$

$$z f'_n(z) = n f_n(z) - n^2 f_{n-1}(z), \quad z d^2 f_n(z)/dz^2 + (1-z) df_n(z)/dz + n f_n(z) = 0$$

bei beliebigem  $n$  die beiden andern folgen. Volk (Würzburg).

**Leitner, A. and R. D. Spence:** The oblate spheroidal wave functions. J. Franklin Inst. 249, 299—321 (1950).

Die Differentialgleichung der Sphäroid-Funktionen

$$(1) \quad (1-z^2) y'' - 2z y' + \left[ \alpha_{lm} - \frac{m^2}{1-z^2} - \varepsilon^2 (1-z^2) \right] y = 0$$

wird durch den Ansatz

$$(2) \quad y(z) = (1-z^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (1-z^2)^k \quad (l-m = \text{gerade})$$

$$(3) \quad y(z) = (1-z^2)^{m/2} \cdot z \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (1-z^2)^k \quad (l-m = \text{ungerade})$$

gelöst. Für die Koeffizienten  $c_{2k}$  ergibt sich ein dreigliedriges Rekursionssystem. Die Bedingung, daß  $F$  = endlich in  $z = \pm 1$  bedeutet, daß  $c_{2k+2}/c_{2k} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dies liefert eine Bedingung für den Eigenwert  $\alpha_{lm}$  in Gestalt einer Kettenbruchgleichung. Sie wird durch Ansatz einer Potenzreihe in  $\varepsilon^2$  für  $\alpha_{lm}$  gelöst. Ihre Koeffizienten werden bis zu dem von  $\varepsilon^8$  explizit berechnet. — Die „radialen Funktionen“ der in den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids separierten Wellengleichung ergeben sich als Lösung von (1) auf der imaginären Achse. Sie werden für kleine  $z$  direkt und für große  $|z|$  auf dem Weg über eine der Integralbeziehungen zwischen den Sphäroid-Funktionen berechnet. Es ergeben sich so Reihenentwicklungen nach den Funktionen  $(1-z^2)^{m/2} (\varepsilon z)^{-m-k-\frac{1}{2}} {}_3F_{m+k+\frac{1}{2}}(i\varepsilon z)$ , wo die  ${}_3$  einen Satz von Zylinder-Funktionen bedeuten; ihre Koeffizienten hängen einfach mit den  $c_{2k}$  aus (2) und (3) zusammen. Diese Reihenentwicklungen für den Fall der Besselschen Funktionen hat Fisher (dies. Zbl. 17, 66) auf anderem Weg gefunden. — Anschließend werden die ebene Welle und die Kugelwelle nach Produkten von Sphäroid-Funktionen entwickelt [s. dazu auch Morse (dies. Zbl. 10, 358) und andere]. Die Eigenwerte  $\alpha_{lm}$  für  $l = 4(1) 11$ ,  $m = 1(1) 4$ ,  $n \geq m$ ;  $\varepsilon = 1(1) 5$  werden auf drei bis sechs Dezimalen angegeben. Die Funktionen  $u(z)$  nach (2) und (3) werden für  $n = 0(1) 5$ ,  $m = 0$ ;  $n = 1(1) 6$ ,  $m = 2$ ;  $n = 2$  und 3,  $m = 2$  auf 4 Dezimalen tabuliert, wobei  $\varepsilon = 1(1) 5$ ,  $\eta = 0(0,1) 1$ . Normierungsintegrale und weitere nützliche Zahlenwerte schließen sich an. J. Meixner.

**Bouwkamp, C. J.:** On the characteristic values of spheroidal wave functions. Philips Research Reports 5, 87—90 (1950).

Sei  $\lambda_n^m(k)$  der Eigenwert der Differentialgleichung der Sphäroid-Funktionen  $(1-z^2) y'' - 2z y' + (\lambda - m^2/(1-z^2) + k^2 z^2) y = 0$ , welcher für  $k \rightarrow 0$  in  $n(n+1)$  übergeht. Die Reihenentwicklung der Eigenwerte  $\lambda_n^m(k)$  nach Potenzen von  $k^2$  wird bis einschließlich des Gliedes mit  $k^8$  für beliebige  $n, m$  (aber  $2n \neq \text{ungerade}$ ) angegeben. Für die Indizes  $m = 1$  und  $n = 1(1) 7$  werden diese Koeffizienten und einige Eigenwerte numerisch berechnet. Diese Potenzreihen eignen sich vorzüglich zur numerischen Berechnung der Eigenwerte für kleine Werte von  $k$  und zwar

um so besser, je größer  $n$  ist. — Druckfehler: Auf Seite 88, letzte Formelzeile heißt es  $(2n+1)^2$  statt  $(2n+1)^7$ .  
J. Meixner (Aachen).

### Funktionentheorie:

**Tchakaloff, L.:** Sur les singularités polaires des séries entières. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 9—12 (1948).

Soit  $f(z) = \sum c_n z^n$  une série de Taylor dont le rayon de convergence est égal à 1. Si la suite  $c_n$  est bornée, tous les pôles de  $f(z)$  sur la circonférence  $|z| = 1$  sont simples. Si  $c_n \rightarrow 0$ ,  $f(z)$  n'a pas de pôles sur  $|z| = 1$ . Si  $c_n$  n'est pas bornée, mais  $c_n/n \rightarrow 0$ ,  $f(z)$  a au moins une singularité non polaire sur  $|z| = 1$ . Horváth (Paris).

**Tchakaloff, L.:** Sur le nombre des zéros non-réels d'une classe de fonctions entières. C. r. Acad. Bulgare Sci. 2, Nr. 1, 9—12 (1949).

L'Au. démontre la proposition suivante: soit  $p(t)$  un polynôme à coefficients complexes,  $\bar{p}(t)$  le polynôme dont les coefficients sont complexes conjugués de ceux de  $p(t)$ . Alors, si  $p(t)$  est de degré  $m$ , et si

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 (p(t)(x+it)^n + \bar{p}(t)(x-it)^n) dt$$

le nombre des zéros non réels de  $P_n(x)$  est au plus  $2[m/2]$ , si  $P_n$  n'est pas identiquement nul, et cette limite est la meilleure possible. Par un passage à la limite, il en déduit que la fonction entière

$$g(x) = \int_{-1}^1 (p(t)e^{itx} + \bar{p}(t)e^{-itx}) dt$$

a au plus  $m$  zéros non réels.

J. Dieudonné (Nancy).

**Rådström, Hans:** Zeros of successive derivatives. Ark. Mat., Stockholm 1, Nr. 12, 101—139 (1950).

Soit  $f(z)$  une fonction analytique; si  $x$  est un point régulier,  $f(z)$  est développable en une série de puissances de  $z-x$ , soit  $\Sigma(x)$ , convergente dans un cercle  $C(x)$  de rayon  $R(x)$ . On pose  $a_n(x) = f^{(n)}(x)/n!$  et  $g_{nm}(x) = \sqrt[n]{a_n(x)}$ , l'indice  $m$  correspondant à la détermination choisie. — La famille  $\{g_{nm}(x)\}$  est normale dans tout domaine  $D$  borné simplement connexe ne contenant aucun point singulier de  $f$  et aucun zéro d'aucune dérivée de  $f$ . Si, dans  $D$ ,  $g_{nv}m_v \rightarrow \varphi(x) \neq \text{const.}$ , alors: 1° il existe une suite  $l_v$  telle que  $g_{n_v+1}l_v \rightarrow \varphi(x)$ ; 2°  $a_{n_v+1}/a_{n_v} \rightarrow \varphi'/\varphi$ . — On suppose dorénavant que  $x_0$  n'est pas point limite de l'ensemble des zéros des dérivées de  $f(z)$  [en abrégé p. l.]: l'ensemble des limites de  $\sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|}$  est un intervalle sauf peut-être si  $\lim \sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|} = 0$ : si  $\lim \sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|} < 1/R(x_0)$ , la série  $\Sigma(x_0)$  présente des lacunes d'Ostrowski; si  $\lim \sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|} = 0$ , on a  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1$  est une fonction entière et où  $f_2$  est développable suivant une série  $\Sigma_2(x_0)$  présentant de grandes lacunes. Si  $\lim \sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|} = 1/R_1 \neq 0$ , on peut donner une borne supérieure de  $\lim |a_{n_v+1}(x_0)/a_{n_v}(x_0)|$  en fonction de  $R_1$ , de  $R(x_0)$  et de la distance de  $x_0$  à l'ensemble des p. l.: si  $\lim \sqrt[n_v]{|a_{n_v}(x_0)|} = 1/R(x_0) \neq 0$ , les points limites de  $a_{n_v+1}(x_0)/a_{n_v}(x_0)$  appartiennent au plus petit domaine convexe fermé contenant tous les points  $1/(s-x_0)$  où  $s$  vient coïncider avec les points singuliers de  $f$  situés sur  $C(x_0)$  [l'A. en déduit une méthode permettant d'obtenir ces points singuliers].

Dufresnoy (Bordeaux).

**Dugué, Daniel:** Sur certaines conséquences qu'entraîne pour une série de Fourier le fait d'avoir tous ses coefficients positifs. Complément au théorème de Weierstrass. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1469—1470 (1949).



Anknüpfend an bekannte Resultate von S. Bernstein über unbegrenzt differenzierbare Funktionen  $f(x)$  mit positiven Ableitungen und von A. Pringsheim über Funktionselemente  $f(z) = \sum a_n z^n$  mit positiven Koeffizienten, bemerkt Verf.: 1. Eine zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  stetige Funktion  $f(x)$  besitze daselbst lauter positive Fourierkoeffizienten, sie sei ferner in  $x=0$  analytisch. Dann ist durchweg  $f(x)$  analytisch [ $f(-\pi) = f(+\pi)$ ] und der Konvergenzradius ihrer Potenzreihenentwicklung mindestens gleich demjenigen ihrer Entwicklung im Nullpunkt. — 2. Die Funktion  $f(x)$  sei zwischen  $-1$  und  $+1$  als Limes einer Folge von Polynomen mit positiven Koeffizienten darstellbar. Dann ist  $f(x)$  daselbst analytisch und der Konvergenzradius ihrer Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt mindestens gleich Eins. — Auf Folgerungen und Verallgemeinerungen wird hingewiesen. *F. Lösch.*

**Boas, Ralph P.:** Sur les séries et intégrales de Fourier à coefficients positifs. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1837—1838 (1949).

Verf. weist auf Verallgemeinerungen des in dem vorstehenden Referat genannten Resultats von D. Dugué über Funktionen mit positiven Fourierkoeffizienten hin.

U. a. gilt der folgende Satz über Fourier-Stieltjes-Integrale: Es sei  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} d\alpha(t)$ , wo  $\alpha(t)$  eine beschränkte, nicht abnehmende Funktion bedeutet. Ist dann  $f(x)$  in einer Umgebung von  $x=0$  analytisch, so ist sie längs der ganzen reellen Achse analytisch, und sie ist überdies in einen Streifen  $|y| < \delta$  der komplexen Ebene analytisch fortsetzbar. *Friedrich Lösch (Stuttgart).*

**Ilieff, Ljubomir:** Analytisch nichtfortsetzbare Potenzreihen. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 25—28 (1948).

Es handelt sich um eine Erweiterung des Satzes von G. Szegő [Math. Ann., Berlin 87, 90—111 (1922)] über Potenzreihen mit nur endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Die Folge  $c_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) genüge bei  $n \rightarrow \infty$  den Bedingungen  $c_{n+1}/c_n \rightarrow 1$  und  $0 < \liminf |c_n| n^{-\alpha} \leq \limsup |c_n| n^{-\alpha} < \infty$  für eine geeignete reelle Zahl  $\alpha$ . Dann gelten die folgenden beiden Sätze. Satz I: Ist jedes Glied der Folge  $\gamma_n$  einer der  $s$  Zahlen  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$  gleich ( $s > 1$ ), und sind die Glieder der Folge  $\gamma_n$  von keinem Index an periodisch verteilt, so ist die Reihe (1)  $\sum \gamma_n c_n z^n$  über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. Satz II: Die Folge  $\gamma_n$  sei beschränkt und besitze genau die (verschiedenen) Häufungspunkte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $s > 1$ ). Es werde die Folge  $\gamma_n$  derart in  $s$  Teilfolgen zerlegt, daß die  $r$ -te Teilfolge den Häufungspunkt  $\alpha_r$  besitzt ( $r = 1, 2, \dots, s$ ), so daß also, wenn das  $n$ -te Glied der Folge  $\gamma_n$  zur  $k_n$ -ten Teilfolge gehört, jedes Glied der Folge  $k_n$  einer der Zahlen  $1, 2, \dots, s$  gleich ist. Sind dann die Glieder der Folge  $k_n$  von keiner Stelle an periodisch verteilt, so ist (1) über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. — Aus einer weiteren Nichtfortsetzbarkeitsbedingung für die Reihe (1) ergibt sich der folgende Satz: Gibt es zu der Lückenreihe (2)  $\sum a_n z^{n_i}$  mit beschränkter Koeffizientenfolge  $a_n$  eine Indexfolge  $n_i$ , so daß die Bedingungen  $\lim_{i \rightarrow \infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} \neq 0$  erfüllt sind, so ist (2) über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. — Verf. gewinnt diese Sätze unter Zuhilfenahme von Ergebnissen und Beweismethoden früherer Arbeiten [Annuaire Univ. Sofia Fac. phys.-math., livre I 41, 31—42 (1944—1945) und livre I 42, 67—81 (1945—1946)]. Satz I wurde schon in der erstgenannten Arbeit des Verf. bewiesen.

*Meyer-König (Stuttgart).*

**Mandelbrojt, S.:** Analytic continuation and indefinitely differentiable functions. Bull. Amer. math. Soc. 54, 239—248 (1948).

**Mandelbrojt, S.:** Sur une inégalité fondamentale. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 63, 531—578 (1946).

In dem zuerst genannten Vortrag sind größere Untersuchungen des Verf. kurz umrissen, die ausführlich in der zu zweit genannten Arbeit mit vollen Beweisen

dargestellt sind. Einzelzüge und Vorstufen finden sich in früheren Arbeiten [Trans. Amer. math. Soc. 55, 96—131 (1944) und dies. Zbl. 29, 23; 30, 117; 32, 67, 151]; sie werden erst hier in Zusammenhang und Bedeutung erkennbar. — Um eine Reihe funktionentheoretischer Fragestellungen zu verknüpfen, hat sich ein einheitliches Prinzip als wertvoll erwiesen: Die verallgemeinerte Approximation einer Funktion  $F(s)$  durch Dirichletpolynome  $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ , in Verbindung mit Schätzungen der Koeffizienten  $d_n$ , welche als grundlegende Fortführung der Cauchyschen Koeffizientensätze bei Potenzreihen erscheint. Die Methode erlaubt es, Untersuchungen über Aufschließung der Singularitäten, z. B. einer Potenz- oder Dirichletreihe, Verhalten einer Funktion in Winkelraum und Streifen, erhebliche Verallgemeinerungen der Quasi-Analytizität u. a. m. zusammenzufassen. — Erst wird das System der Basisfunktionen  $e^{-\lambda_n s}$  gekennzeichnet durch die Vorgabe der monoton wachsenden Folge  $\lambda_n > 0$ , und mit folgenden Mitteln beschrieben: Die Anzahl  $N(\lambda)$  der  $\lambda_n < \lambda$  („Verteilung“ genannt), ihre (relative) Dichtefunktion  $D(\lambda) = N(\lambda) : \lambda$ , dazu die obere Dichtefunktion  $D^*(\lambda) = \lim_{x \geq \lambda} D(x)$ , und die mittlere Dichtefunktion

$$D(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^\lambda D(t) dt, \text{ analog } \bar{D}^*(\lambda), \text{ und schließlich zugeordnete Zahlen } D^*, \bar{D}^*, \text{ als}$$

$\limsup$  bzw.  $\lim$  gebildet für  $\lambda \rightarrow \infty$  aus  $D(\lambda)$ ,  $\bar{D}(\lambda)$  bzw.  $D^*(\lambda)$ ,  $\bar{D}^*(\lambda)$ ; in  $\bar{D}^* \leq D^*$  sind beide Fälle möglich. Durchweg wird  $D^* < \infty$  vorausgesetzt. — Die approximierende Funktion  $F(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , sei regulär in einem Gebiet  $\Delta$ , das beliebig große  $\sigma$  zuläßt. Als Maß für die Approximation von  $F(s)$  durch Dirichletpolynome  $\sum_{n=0}^m d_n e^{-\lambda_n s}$  genügend hohen „Grades“,  $m \geq n$ , dient eine ( $\uparrow$  gedachte) Funktion  $p_n(\sigma)$ , die logarithmische Präzision; dabei wird gefordert, daß für  $s \in \Delta$ ,  $x$  groß,

$$\lim_{m \geq n} \overline{\lim}_{\sigma \geq x} \left| F(s) - \sum_{n=0}^m d_n e^{-\lambda_n s} \right| \leq e^{-p_n(x)}$$

gelten solle. Dann heißt  $F(s)$  durch Dirichletpolynome mindestens  $n$ -ten Grades,  $m \geq n$ , mit der logarithmischen Präzision  $p_n(x)$  approximierbar. Konvergenz entspräche etwa  $p(\sigma) \equiv \infty$ ; dies aber zieht nur Überkonvergenz nach sich. — Drittens wird  $F(s)$  als fortsetzbar angenommen bis in einen genügend weit links gelegenen Kreis  $C(s_0, r)$ , und zwar durch einen Kanal (Gebiet, welches ein Kreis festen Halbmessers überstreicht, wenn der Mittelpunkt einem Jordanbogen folgt). — Dann können die Koeffizienten  $d_k$  des Approximationspolynoms geschätzt werden, sobald  $\Delta$  in der  $t$ -Richtung für große  $\sigma$  nicht zu schmal ist,  $p_n(\sigma)$  rasch genug wächst, und  $r > D^*$  gilt; dabei werden Breite  $g(\sigma)$  von  $\Delta$  und log. Präzision  $p_n(\sigma)$  so gegeneinander ausgewogen, daß ein gewisses Integral über beide für  $\sigma \rightarrow \infty$  divergiert. Die Schranke für  $|d_k|$  wird abhängig von dem Wertvorrat der Funktion  $F(s)$  weit links, und zwar durch den Maximalbetrag auf dem oben erwähnten Kreise  $C(s_0, r)$ , und, bei  $r > D^*$ , von der Struktur der Folge der Exponenten  $\lambda_n$ , genauer von

$$\lambda_k, \quad v(r) = \lim_{\lambda > 0} \lambda (\bar{D}(\lambda) - r), \quad A_k = \lambda_k \prod_{n \neq k} \frac{\lambda_n^2}{|\lambda_k^2 - \lambda_n^2|}.$$

Die Abschätzung lautet („Inégalité fondamentale“):

$$(I) \quad |d_k| \leq \left(\frac{1}{2}\pi^2 \lambda_k\right) \cdot e^{2v(r) + \lambda_k \sigma_0} \cdot A_k \cdot \max_{|s-s_0| \leq r} |F(s)|.$$

Wesentliche Elemente des Beweises weisen in die harmonische Maßtheorie und benutzen Streifensätze von Ahlfors. Es ergeben sich Aussagen, die gewiß nahe an endgültiger Schärfe liegen. Sie umfassen klassische Sätze über konvergente Dirichletreihen, reichen aber weit über sie hinaus, weil nur die Approximierbarkeit im obigen Sinne gebraucht wird. Sie erlauben Schlüsse auf das Verhalten von  $F(s)$ .



z. B. in einem Parallelstreifen  $|t| \leq T$ , etwa: auf das Auftreten einer Singularität, auf  $F(s) \rightarrow \infty$  in  $|t| \leq T - \varepsilon$  für  $\sigma \rightarrow \infty$ , auf „ $F(s)$  nimmt dort alle Werte  $\neq a$ ,  $\infty$  an“; damit schließt die Untersuchung an die Wertverteilungslehre an, besonders den Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreis und Juliasche Richtungen. — Den Zugang zu Arbeiten über Funktionen  $f(x)$ , die auf  $x \geq 0$  beliebig oft (reell) differenzierbar sind, vermittelt einerseits der Begriff des Charakters

$$C_f(\sigma) = \overline{\lim}_{n \geq 1} (n\sigma - \log m_n)$$

von  $f(x)$ , bei  $m_n = \overline{\lim}_{x \geq 0} f^{(n)}(x) < \infty$ ; andererseits die Zuordnung einer Schar von Funktionen  $F_a(s)$ , regulär für  $e^\sigma \cos t \geq 1$ , zu  $f(x)$  durch

$$F_a(s) = \int_0^\infty \exp[-x e^s - a] f(x) dx \quad (a \text{ reell}).$$

Ein Lemma, das im wesentlichen durch partielle Integration zugänglich wird, führt zurück auf (I); dort ist  $|F_a(s)| \leq m_0 e^a$  und  $F_a(s)$  im erst erwähnten Sinne approximierbar mit der logarithmischen Präzision  $C_f(\sigma - a) - a$ ; die Koeffizienten  $d$  werden angebar, die  $\lambda_n = q_n + 1$ , wenn  $f^{(v)}(0) \neq 0$  für die Folge  $v = q_n$ , sonst aber  $f^{(v)}(0) = 0$ . Ein Hauptergebnis erlaubt es, auf  $f(x) \equiv 0$  zu schließen, sobald die Folge der  $q_n$  geringe Dichte hat,  $D^* < \frac{1}{2}$ ; dagegen führt ein Umkehrsatz auf die Existenz eines nicht identisch verschwindenden  $f(x)$  bei größerer Häufigkeit der  $q_n$ , gemessen durch  $\lim \log q_n/n = 0$ . — Eine reiche Zahl von Anwendungen umfaßt viele bekannte, ja klassische Aussagen über quasi-analytische Funktionen (Denjoy, Carleman, Watson, N. Wiener), sie erlaubt neue Folgerungen. Man vgl. dazu auch die eingangs genannten Referate.

Egon Ullrich (Gießen).

**Breusch, Robert:** On the distribution of the values of  $|f(z)|$  in the unit circle. Bull. Amer. math. Soc. 54, 1109—1114 (1948).

Es bedeute  $\{f\}$  die Gesamtheit aller in  $|z| \leq 1$  regulären analytischen Funktionen  $f(z)$  mit der Eigenschaft  $f(0) = 1$ ,  $f(z) \neq 1$ . Bedeutet dann allgemein  $A(f)$  den Inhalt der Punktmenge des Einheitskreises, wo  $|f(z)| \geq 1$  ist, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  stets zwei Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  mit der Eigenschaft:  $A(f_1) > \pi - \varepsilon$ ,  $A(f_2) < \varepsilon$ .

Dinghas (Berlin).

**Mathéev, A.:** Sur les fonctions holomorphes dans le cercle-unité, dont les zéros ont leurs points limites sur la frontière. C. r. Acad. Bulgare Sci 1, Nr. 1, 29—32 (1948).

Verf. untersucht die Klasse der Funktionen  $f(z)$ , welche regulär im Kreise  $|z| < 1$  sind. Er nennt  $\lim_{r \rightarrow 1} \log^+ \log M(r) / \log(1-r)^{-1} \left[ M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \right]$  die (scheinbare) Ordnung  $\sigma'$  der Funktion  $f(z)$  im Einheitskreise. Verf. beweist, daß  $\sigma'$  und die von R. Nevanlinna eingeführte Ordnung  $\lambda$  der Bedingung  $\lambda \leq \sigma' \leq \lambda + 1$  genügen. Ist  $1 + \sigma$  der Konvergenzexponent der Folge  $1 - |a_v|$ , wo  $a_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) die Nullstellen von  $f(z)$  sind, so ist  $\sigma \leq \sigma'$ . Er studiert ferner eine Klasse von rationalen Funktionen mit gegebenen Nullstellen innerhalb des Einheitskreises.

V. Paatero (Helsinki).

**Mathéev, A.:** Sur les fonctions holomorphes dans le cercle-unité, dont les zéros ont leurs points limites sur la frontière. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 2/3, 13—14 (1948).

Verf. studiert die Produktdarstellung einer im Einheitskreise regulären Funktion  $f(z)$ , deren Nullstellen ihre Häufungspunkte auf der Peripherie haben. Er untersucht ferner die Abhängigkeit der Konvergenz der Nullstellen gegen die Peripherie von dem Anwachsen der Funktion für  $|z| \rightarrow 1$ . V. Paatero (Helsinki).

**Magnaradze, L. G.:** Über eine lineare Randwertaufgabe der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 17—20 (1949) [Russisch].

Es sei  $D^+$  ein beschränktes ebenes Gebiet, begrenzt durch eine geschlossene, doppelpunktfreie, glatte Kurve  $L$ .  $D^-$  sei das Äußere von  $L$ . — Es sind ein Vektor  $\varphi^+(z)$  mit in  $D^+$  analytischen Komponenten und ein Vektor  $\varphi^-(z)$  mit in  $D^-$  analytischen Komponenten, die im Unendlichen von endlicher Ordnung sind, so zu bestimmen, daß auf  $L$  mit einer bestimmten Matrix  $C(t)$  gilt:  $\varphi^-(t) = C(t) \varphi^+(t)$ ,  $\det C(t) \neq 0$  auf  $L$ . — Für ein Funktionenpaar  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  und stetiges  $C(t)$  hat Verf. früher die Lösbarkeit der Aufgabe unter folgender Voraussetzung bewiesen: Setzt man

$$\omega(\tau; C) = \max_{|s_2 - s_1| \leq \tau} |C(t_2) - C(t_1)|, \quad 0 < \tau \leq l.$$

worin  $s_1$  und  $s_2$  die Bogenlängen von  $L$  an den Stellen  $t_1$  und  $t_2$ , gemessen von einem festen Punkt von  $L$  an, und  $l$  die Länge von  $L$  bedeuten, so sei

$$(1) \quad \omega(\tau; C) = o(1/\log^p \tau^{-1}) \text{ für beliebiges } p \geq 0.$$

Jetzt betrachtet er Vektoren  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  und läßt für die Elemente der Matrix  $C(t)$  endlich viele Unstetigkeiten erster Art zu. Wie (1) in diesem Falle zu modifizieren ist, wird in der Note nicht deutlich genug formuliert und kann hier nicht wieder gegeben werden.

Thimm (Bonn).

**Gachov, F. D.:** Über das Riemannsche Randwertproblem für Systeme von  $n$  Funktionenpaaren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 601—604 (1949) [Russisch].

Das ebene Gebiet  $S^+$  werde von einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier, glatter Kurven begrenzt.  $S^-$  sei die Komplementärmenge zur abgeschlossenen Hülle von  $S^+$ . — Es handelt sich um die Lösung der folgenden Randwertaufgabe:  $\varphi^+(x)$  bezeichne einen Vektor, dessen Komponenten in  $S^+$  analytisch sind, und  $\varphi^-(z)$  sei ein Vektor mit in  $S^-$  analytischen Komponenten.  $\varphi^+$  und  $\varphi^-$  sind so zu bestimmen, daß auf dem Rande mit einer bestimmten Matrix  $A(t)$  die Beziehung  $\varphi^+(t) = A(t) \varphi^-(t)$  gilt. — Verf. beweist die Lösbarkeit der Aufgabe für den Fall, daß  $A(t) = \Omega^+(t) \cdot \Omega^-(t)$  ist. Dabei sei  $\Omega^+(t) = \|\omega_{ij}^+(t)\|$  eine Matrix, deren Elemente  $\omega_{ij}^+(t)$  Randwerte von in  $S^+$  analytischen Funktionen sind, und die Elemente der Matrix  $\Omega^-(t)$  seien Randwerte von in  $S^-$  analytischen Funktionen.

Thimm (Bonn).

**Rothstein, Wolfgang:** Über die Fortsetzbarkeit regulärer und meromorpher Funktionen von zwei Veränderlichen und den Hauptsatz von Hartogs. Math. Nachr., Berlin 3, 95—101 (1950).

Die grundlegenden Sätze von F. Hartogs über die Regularitätsradien analytischer Funktionen zweier komplexer Veränderlichen sind neuerdings von P. Lelong (dies. Zbl. 26, 15) durch zahlreiche neue Resultate ergänzt und vertieft worden. Ausgangspunkt der Untersuchungen von Lelong waren wie bei Hartogs die Entwicklungen nach einer Veränderlichen  $\sum a_n(w) z^n$ ; insbesondere wurde die Superharmonizität der  $\log |a_n(w)|$  benutzt. In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf., daß sich wichtige Sätze dieses Problemkreises allein aus dem superharmonischen Charakter der Regularitätsradien ableiten lassen. Das ist von Bedeutung, weil auch die Meromorphieradien und die Radien der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge regulärer Funktionen superharmonisch sind und so analoge Sätze über diese Größen gewonnen werden können. Zugleich ergeben sich neue Aussagen über die Regularitätshüllen gewisser Hartogsscher Mannigfaltigkeiten. In den Beweisen des Verf. wird als wesentliches Hilfsmittel die Theorie des harmonischen Maßes herangezogen. Aus seinen Resultaten sei die folgende Übertragung eines bekannten Hartogsschen Satzes herausgegriffen: Sei  $C$  ein abgeschlossener Jordanbogen in  $|w| < 1$ . Die Funktion  $f(w, z)$  sei in  $\{|w| < 1, |z| < 1\}$  meromorph. Ferner möge  $f(c, z)$  für jedes  $c$  auf  $C$  als Funktion der einen Variablen  $z$  in  $|z| < 2$  meromorph bleiben. Dann ist für jedes  $c$  auf  $C$  der Meromorphieradius  $Q(c, 0)$  von  $f(w, z)$  mindestens gleich 2.

Stein (Münster).



**Cherubino, Salvatore:** Estensione di un lemma di Goursat e funzioni olomorfe di più matrici. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 293—299 (1949).

Zum Beweise des ersten Integralsatzes von Cauchy für eine analytische Funktion  $f(z)$  teilt Goursat den von der geschlossenen Kurve berandeten Bereich in quadratische Flächenstücke  $Q$  ein und integriert über deren Ränder. Dazu müssen die Dimensionen der  $Q$  so klein gewählt werden können, daß es im Innern oder auf dem Rande einen Punkt  $z'$  gibt, so daß beim Umlauf von  $Q$  stets  $|f(z) - f(z') - (z - z') f'(z')| \leq |z - z'| \varepsilon$ . Verf. erweitert dieses Lemma auf Funktionen  $w = f(z_1, \dots, z_n)$  von  $n$  komplexen Variablen in der Form

$$\left| f(z_1, \dots, z_n) - f(z'_1, \dots, z'_n) - \sum \frac{\partial w}{\partial z_j} (z_j - z'_j) \right| \leq \varepsilon \sum |z_j - z'_j|.$$

Daraus ergeben sich Anwendungen auf die vom Verf. in mehreren Arbeiten behandelte Theorie der Funktionen in Algebren komplexer Matrizen. *Trost* (Zürich).

**Kriszten, Adolf:** Areolar monogene und polyanalytische Funktionen. Comment. math. Helvetici 21, 73—78 (1948).

In Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $Af = f_x + i f_y = 0$  für  $f = u(x, y) + i v(x, y)$  haben Pompeiu [Rend. Circ. mat. Palermo 33, 108—113 (1912)] u. a. die Gleichung  $A^2 f = f_{xx} - f_{yy} + 2i f_{xy} = 0$  betrachtet und die ihr genügenden Funktionen areolar monogen (a. m.) genannt. Verf. beweist: 1. Die Komponenten  $u, v$  einer a. m. Funktion sind biharmonisch,  $\Delta \Delta u = \Delta \Delta v = 0$ . 2. Gilt in einem achsenparallelen Rechteck  $R$   $\Delta \Delta u = 0$ , so gibt es ein  $v$  in  $R$ , so daß  $u + i v$  eine a. m. Funktion ist. 3. Es gilt der erste Cauchysche Satz in der Form  $\int (g A f - f A g) dz = 0$ ,  $g, f$  a. m. Fkt. 4. Es gilt eine dem zweiten Satz von Cauchy entsprechende Formel. — Verf. betrachtet schließlich die durch die Gleichung  $A^n f = 0$  definierten polyanalytischen Funktionen und stellt für sie entsprechende Sätze auf. *Trost* (Zürich).

**Fueter, Rud.:** Über Abelsche Funktionen von zwei komplexen Variablen. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 211—215 (1949).

Die Abelschen Funktionen von zwei komplexen Variablen  $z_1 = x_0 + i_1 x_1$ ,  $z_2 = x_2 + i_1 x_3$  können als Spezialfall der rechtsanalytischen vierfach-periodischen Quaternionenfunktionen aufgefaßt werden, wenn man für zwei Abelsche Funktionen  $w_1 = f_1(z_1, z_2)$ ,  $w_2 = f_2(z_1, z_2)$  mit dem Periodensystem  $\omega'_k, \omega''_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) setzt  $z = z_1 + z_2 i_2$ ,  $w = w_1 + i_2 w_2$ ,  $\omega_k = \omega'_k + \omega''_k i_2$ , wo  $1, i_1, i_2, i_3$  die Quaternioneneinheiten sind. Um solche Paare Abelscher Funktionen aufzustellen, müssen die entsprechenden Quaternionenfunktionen meromorph sein. Unter diesem Gesichtspunkt hat sich der Verf. in einer früheren Arbeit [Mh. Math. Phys., Wien 48, 161—169 (1939); dies. Zbl. 21, 336] mit diesem Problem beschäftigt. Hier löst er die Aufgabe mit Hilfe einer der Weierstraßschen  $\zeta$ -Funktion entsprechenden meromorphen Funktion  $\zeta(z, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ , wo  $\zeta(z + \omega_k) = \zeta(z) + \eta_k$ . Die Konstanten  $\eta_k$  erfüllen eine verallgemeinerte Legendresche Relation  $\sum_{h,k} O_{hk} \eta_k = 8\pi$ . Dabei ist  $O_{hk}$  Unterdeterminante in der Determinante der Komponenten  $o_{hk}$  von  $\omega_k$  ( $h, k = 1, 2, 3, 4$ ). Die Darstellung der vierfachperiodischen Funktionen erfolgt durch eine Summe von Stieltjesschen Integralen nach dem Vorgang von W. Neff [Comment. math. Helvetici 15, 144—174 (1943)]. *Trost* (Zürich).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen: Differenzengleichungen:

• **Collatz, L.:** Differentialgleichungen für Ingenieure. (Bücher der Technik. Hrsg. v. A. Kühlenkamp.) Hannover: Wissenschaftliche Verlagsanstalt, in Gemeinschaft mit Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel, 1949. 156 S. mit 77 Bildern. Broschiert DM 9,60; geb. DM 10,40.

Das vorliegende Büchlein enthält in 4 Kapiteln eine Einführung in das für

Ingenieure Wichtigste über gewöhnliche Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung, Rand-, insbesondere Eigenwertaufgaben sowie partielle Differentialgleichungen, und berichtet in einem Schlußkapitel über einige Näherungsverfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Darstellungsweise ist dem Zweck in vortrefflicher Weise angepaßt, sie ist flüssig und leicht lesbar, dabei mathematisch völlig korrekt. Um schwierigere Dinge klar zu machen, wird viel mit Beispielen gearbeitet, wie überhaupt das ganze Buch durch zahlreiche Anwendungen gewürzt und mit vielen schönen Figuren versehen ist (Bild 7 wäre noch schöner, wenn die Kurven nicht so weit parallel der  $t$ -Achse fortgeführt wären). Die Kunst, Ingenieure in die Mathematik einzuführen, wird hier mit Meisterschaft geübt; das Werk kann wärmstens empfohlen werden.

Schmeidler (Berlin).

Erugin, N. P.: Bemerkung über die Integration eines Systems von zwei Gleichungen in endlicher Form. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 315 (1950) [Russisch].

Wachs, Sylvain: Sur l'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle linéaire. Bull. Sci. math., II. S. 74, 40—72 (1950).

L'A. dimostra che la risoluzione di un'equazione differenziale lineare e omogenea di ordine  $n + 1$  si può ricondurre a quella di un'equazione differenziale non lineare di ordine  $n$  seguita da una quadratura; quest'ultima equazione viene detta la risolvente dell'equazione data. L'A. esamina anzitutto i casi particolari  $n = 1$  e  $n = 2$ . Nel primo caso la risolvente è un'equazione di Riccati. Nel caso  $n = 2$  vengono studiate le relazioni che sussistono fra l'equazione data, la relativa risolvente (che ha un'ufficio analogo a quello che ha l'equazione di Riccati nel caso  $n = 1$ ) e l'equazione aggiunta, secondo Lagrange, dell'equazione data. In particolare, citiamo il teorema: „Se si conosce l'integrale generale dell'equazione data, o dell'aggiunta, si integrerà l'altra e la risolvente senza quadrature. Se si conoscono tre integrali distinti della risolvente, si integrerà la data e l'aggiunta con tre quadrature soltanto“. — L'A. tratta quindi il caso generale e, introdotta la risolvente e l'aggiunta dell'equazione data, studia le mutue relazioni fra queste tre equazioni, dimostrando il seguente teorema: „Se si conoscono  $p \leq n + 1$  integrali distinti di una di queste tre equazioni, si ha l'integrale generale di una di esse, risolvendo un'equazione differenziale lineare di ordine  $n + 1 - p$  seguita da quadrature“. Giuliano.

El'sin, M. I.: Phasenmethode und klassische Vergleichsmethode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 813—816 (1949) [Russisch].

Die Abhandlung beschäftigt sich mit Oszillationssätzen für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ ,  $p$  und  $q$  stetig für  $a < t < b$  (allgemeinen Schwingungsgleichungen). An Stelle der auf Sturm zurückgehenden klassischen Vergleichsmethode wird im Anschluß an zwei frühere Arbeiten des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 221—224 (1949); C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 18, 141—145 (1938); ein neues Verfahren entwickelt, das eine allgemeinere Lösung gibt. Mit Hilfe eines aus  $p$  und  $q$  gebildeten „charakteristischen Operators“ wird der Dgl. ein „Phasengesetz“ zugeordnet, aus dem sich u. a. notwendige und hinreichende Bedingungen ergeben 1. dafür, daß die Dgl. in  $a < t < b$  keine Halbwelle hat, 2. dafür, daß es Intervalle gibt, in denen eine (rechte bzw. linke) Halbwelle existiert, 3. dafür, daß für  $t < t_0$  ( $t > t_0$ ) mit  $a < t_0 < b$  die Lösungen der Dgl. in  $a < t < b$  eine abzählbare Menge von Schwingungen vollführen (der Fall  $b \rightarrow \infty$  ist zugelassen.) Die erhaltenen Resultate werden auch im Hinblick auf die bekannten klassischen Bedingungen (Knesersche Bedingung u. a.) diskutiert. Reutter (Karlsruhe).

Amerio, Luigi: Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di una equazione interessante l'elettrotecnica. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 75—90 (1949).

The author discusses the differential equation (1)  $y'' + A y' + B \sin y = C$ , where  $A, B, C < B$ , are positive constants. This equation is connected with the



problem of the start of synchronous motors. F. Tricomi [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. S. 2, 1—20 (1933); this Zbl. 6, 55] studied this equation giving conditions for the existence of solutions of (1) which can be expressed as a sum of periodic and linear functions. The author gives, in the present paper, through the theory of the characteristic, a description of the behaviour of the solutions of the equation (1).

L. Cesari (Bologna).

**Friedlander, F. G.:** On the asymptotic behaviour of the solutions of a class of non-linear differential equations. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 406—418 (1950).

$\ddot{x} + x = k f\{x, \dot{x}, t\}$ . Wenn  $A > 0$  und  $\alpha$  Funktionen der Zeit sind, kann  $x = A \sin\{t + \alpha\}$  und  $\dot{x} = A \cos\{t + \alpha\}$  gesetzt werden.

$$A\{t_1\} = A_1, \quad A\{t_2\} = A_2, \quad \alpha\{t_1\} = \alpha_1$$

$$\mu\{A_1, \alpha_1, t_1, t_2 - t_1\} = \frac{2A_1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f\{A_1 \sin(t + \alpha_1), A_1 \cos(t + \alpha_1), t\} \cos\{t + \alpha_1\} dt.$$

Verf. nimmt an, daß  $\mu\{A_1, \alpha_1, t_1, t_2 - t_1\}$  bei  $t_2 \rightarrow \infty$  einem Grenzwerte  $\mu\{A_1\}$  zustrebt, der von  $\alpha_1$  und  $t_1 \geq 0$  nicht abhängt.

$$0 < H \leq A \leq K, \quad \max |f| = M, \quad \max \frac{|f\{x', \dot{x}', t\} \dot{x}' - f\{x, \dot{x}, t\} \dot{x}|}{|x - x'| + |\dot{x} - \dot{x}'|} = L$$

$$\max |\mu\{A, \alpha, t, T\} - \mu\{A\}| = \eta\{T\}.$$

Wenn

$$H + \sqrt{2} k M \{t_2 - t_1\} \leq A_1 \leq K - \sqrt{2} k M \{t_2 - t_1\},$$

liegt  $A_2^2$  zwischen

$$A_1^2 + k\{t_2 - t_1\} \{\mu(A_1) \pm \eta(t_2 - t_1) \pm 2k M L(t_2 - t_1)\}.$$

Dieser Satz wird auf  $A_n$  und  $A_{n+1}$  angewandt, wobei  $A_n = A\{t_1 + (n-1)(t_2 - t_1)\}$ . Um die Grenzen von  $A_n$  einzuhalten, nimmt Verf.  $\mu\{H\} > 0$  und  $\mu\{K\} < 0$  an. Weitere Annahme  $A^2 + k\{t_2 - t_1\} \mu\{A\}$  soll eine wachsende Funktion von  $A$  sein, d. h.  $k\{t_2 - t_1\} \leq H/\sqrt{2}L$ . Wenn  $H' \leq A_1^2 \leq K'$ , liegen auch die Grenzen  $A_{n+1}^2$  und  $A_{n+1}^{\prime\prime 2}$  von  $A_{n+1}^2$  zwischen  $H'$  und  $K'$ . Wenn  $n \rightarrow \infty$ , existieren die Grenzwerte der Grenzen. Je nachdem  $k\{\mu(A_1) + \eta(t_2 - t_1) + 2k M L(t_2 - t_1)\} \geq 0$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{\prime\prime 2}$  die kleinste oder größte 0-Stelle von  $k\{\mu(A) + \eta(t_2 - t_1) + 2k M L(t_2 - t_1)\}$  als Funktion von  $A^2$ , die größer oder kleiner als  $A_1^2$  ist. Wenn  $= 0$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{\prime\prime} = A_1$ .

Weitere Sätze. Anm. d. Ref.: In der Zeile nach (2.42) muß in beiden Gleichungen  $\alpha_1$  durch  $t_1 + \alpha_1$  ersetzt werden.

Ludwig (Hannover).

**Bellman, Richard:** On the existence and boundedness of solutions of non-linear differential-difference equations. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 347—355 (1949).

The author discusses the existence and boundedness of the solutions of the functional equation

$$(1) \quad (d/dt) u(t+1) = a_1 u(t) + a_2 u(t+1) + f[u(t), u(t+1)], \quad 0 \leq t < +\infty,$$

as  $t \rightarrow +\infty$ , where  $a_1, a_2$  are constant, where

$$f[u(t), u(t+1)] = b_1(t) u(t) + b_2(t) u(t+1) + \sum_{i,j \geq 2} b_{ij}(t) u(t)^i u(t+1)^j,$$

$b_1(t), b_2(t)$  being absolutely integrable over  $(0, +\infty)$ , where  $|b_{ij}(t)| \leq b_{ij}$  and the series  $\sum b_{ij} x^i y^j$  being absolutely convergent if both  $x, y$  are sufficiently small. The solutions are supposed to satisfy the initial condition  $u(t) = \Phi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , where  $\Phi(t)$  is a given function of  $t$ . The main result is that, if all the roots of  $s e^s - a_1 e^s - a_2 = 0$  lie on the left of  $\Re(s) = -\lambda < 0$ , if  $\max |\Phi(t)|$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , is sufficiently small, then the solution of (1) exists for each  $t > 0$ , is unique and  $\rightarrow 0$  as  $t \rightarrow +\infty$ . The method adopted consists in proving first that each solution of (1) can be expressed, under certain conditions, as a solution of a non-linear integral equation and in discussing then this integral equation. Extensions are given to more general differential-difference equations.

L. Cesari (Bologna).

**Carafa, Mario: Risoluzione dell'equazione differenziale generale lineare bi-nomia, di ordine qualunque, mediante un numero finito di integrazioni.** Mem. Soc. Ital. Sci., III. S. 26, 185—297 (1947).

Si considera l'equazione differenziale (1)  $d^n y/dx^n - a(x)y = f(x)$ , ove  $y(x)$  è la funzione incognita,  $n$  è un numero intero positivo qualunque,  $a(x)$ ,  $f(x)$  sono due funzioni analitiche regolari monodrome in una regione semplicemente connessa del piano complesso contenente il punto  $x_0$ , e mediante la teoria dei funzionali analitici di Fantappiè si perviene all'espressione dell'integrale della (1) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(2) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

A tal uopo, applicando ad ambo i membri della (1)  $n$  volte l'operatore „integrazione rispetto a  $x$  da  $x_0$  a  $x$ “ (che viene indicato con  $I$ ), dalla (1), tenuto conto delle (2), l'A. deduce l'equazione integrale

$$(3) \quad y(x) - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} a(t) y(t) dt = \bar{f}(x),$$

ove

$$(4) \quad \bar{f}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + y_0 + (x-x_0)y'_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)}.$$

Dalla (3) si ricava la funzione incognita  $y(x)$  mediante la serie

$$(5) \quad y(x) = \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) I^{n+k}\right) \bar{f}(x),$$

ove tutti gli operatori  $I$  stanno a destra e le funzioni  $a_k(x)$  sono polinomi di  $a(x)$  e delle sue derivate. — Siccome la serie per il calcolo effettivo dell'operatore che figura al secondo membro della (5) non è convergente, l'A. sostituisce all'operatore  $I$  l'operatore  $B = I \partial/\partial s$ , e perviene alla seguente espressione  $y(x) = \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) I^{n+k}\right) \bar{f}(x)$ , ove all'operatore che figura al secondo membro è „coordinata“ la serie

$$(6) \quad H_1(x, \eta s) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \frac{(\eta s)^{n+k}}{(n+k)!}.$$

La risoluzione del problema (1), (2) è così ricondotta al calcolo di  $H_1$ , ottenuta la quale risulta

$$y(x) = \bar{f}(x) + \int_{x_0}^x \left[ \frac{\partial H_1(x, \xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=x-x} \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Per calcolare la somma  $H_1$  della serie (6) si prova che  $H_1$  è soluzione del problema ai limiti relativo all'equazione a derivate parziali (chiamata equazione „d'appoggio“)

$$(7) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n H_1 = a(x) H_1$$

e alle condizioni

$$H_1(x, 0) = 1, \quad \left[ \frac{\partial H_1(x, \xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \dots, \quad \left[ \frac{\partial^{n-1} H_1(x, \xi)}{\partial \xi^{n-1}} \right]_{\xi=0} = 0.$$

Applicando ad ambo i membri della (7)  $n$  volte l'operatore „integrazione rispetto a  $\xi$  da 0 a  $\xi$ “ (che si indica con  $I_\xi$ ) la (7) si trasforma nell'equazione integro-differenziale

$$\frac{1}{a(x)} \left( 1 + I_\xi \frac{\partial}{\partial x} \right)^n H_1 - I_\xi^n H_1 = \frac{1}{a(x)},$$

dalla quale, indicato con  $T$  l'operatore  $T = \frac{1}{a(x)} \left( 1 + I_\xi \frac{\partial}{\partial x} \right)^n$ , si trae  $H_1 = \left( \frac{1}{T - I_\xi^n} \right) \frac{1}{a(x)}$ .

Il calcolo della funzione  $H_1$  dipende ora da quello degli operatori  $T$  e  $I_\xi$ , cioè dalla risoluzione delle loro equazioni fondamentali

$$(8) \quad \alpha p - T p = \frac{1}{a(x)}, \quad \beta \bar{\gamma} - I_\xi \gamma = p.$$

Questa ultima si integra senza difficoltà ottenendo  $\gamma = [1/\beta] p(x, \xi; \alpha) + [1/\beta^2] \int_0^\xi e^{(\xi-t)\beta} p(x, t; \alpha) dt$ , mentre la (8), chiamata equazione „intermedia“, è un'equazione a derivate parziali, la cui integrazione costituisce una delle parti più notevoli della Memoria in esame. L'A. perviene alla



seguinte espressione esplicita

$$p(x, \xi; \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^5 a(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \sigma_{(\sigma=1)}} \oint_{C_{\alpha_1}} d\alpha_1 \oint_{C_\eta} d\eta \oint_{C_\lambda} d\lambda \oint_{C_{\beta_1}} d\beta_1 \frac{e^{\xi/\beta_1}}{\beta_1} \bar{V}_n \bar{q}_0,$$

ove  $\bar{V}_n$  è una funzione universale invariabile dipendente soltanto dal numero  $n$ , e

$$\bar{q}_0 = \frac{\lambda^{n-1} e^{\lambda(z-1)}}{\eta \alpha_1 \lambda^n - P(1)} - \lambda^{n-1} \int_1^z \left( \frac{1 + \lambda z}{\tau^2} \right) \eta \frac{e^{\lambda(z-\tau)}}{\alpha_1 \lambda^n - P(\tau)} d\tau,$$

con

$$P(\tau) = P(\tau, x, z, \lambda \beta_1) = \frac{1}{\lambda \beta_1} \int_x^{x + \lambda \beta_1 (z-\tau)} \frac{1}{\alpha(v)} \Gamma\left(z + \frac{x-v}{\lambda \beta_1}\right) dv,$$

$\Gamma$  essendo la nota funzione Euleriana. In definitiva l'espressione (in forma esplicita) della soluzione del problema (1), (2) è la seguente

$$(9) \quad y(x) = \bar{f}(x) + \frac{1}{(2\pi i)^4} \frac{\partial}{\partial \sigma_{(\sigma=1)}} \int_{x_0}^x d\bar{x} \oint_{C'} d\bar{z} \oint_{C_\mu} d\mu \oint_{C_\omega} d\omega \oint_{C_c} dc [M_n]_{\xi = x - \bar{x}}(\dots),$$

con

$$(\dots) = \left( \frac{\bar{f}(\bar{x})}{c a(x) - [a(x)/\omega] \int_x^{x + \omega(z-\mu)} \frac{[1/a(v)] \Gamma(z + (x-v)/\omega) dv}{\omega} \right),$$

ove  $M_n = M_n(x, \xi, z, \mu, \omega, c, \sigma | h_1)$  è una funzione universale invariabile formata mediante  $\bar{V}_n$ . Tenuta presente la (4), la (9) mette in evidenza che, qualunque sia l'intero positivo  $n$ , la soluzione del problema (1), (2) si ottiene mediante sette integrazioni (delle quali tre sono quadrature ordinarie e quattro sono calcoli di residui) e una derivazione a partire dagli elementi noti e dalla funzione universale  $M_n$ .  
S. Cinquini (Pavia).

## Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Beckert, Herbert: Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für das Differenzenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems, des gemischten Anfangs-, Randwert- und des charakteristischen Problems einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 97, Nr. 4, 42 S. (1950).

Von H. Levy ist die Existenz und Eindeutigkeit für die Lösung des Anfangswertproblems einer hyperbolischen Differentialgleichung in zwei Veränderlichen bewiesen durch Zurückführung auf ein System von fünf quasilinearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung für die fünf Unbekannten  $x, y, z, p, q$ :

$$(A) \quad \begin{aligned} a_i x/\alpha + b_i y/\alpha + c_i z/\alpha + d_i p/\alpha + e_i q/\alpha &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ a_i x/\beta + b_i y/\beta + c_i z/\beta + d_i p/\beta + e_i q/\beta &= 0 \quad i = 5, 6. \end{aligned}$$

Verf. kommentiert die Levysche Lösung für das Anfangswertproblem dieses Systems nach dem Differenzenverfahren. Gleichzeitig wird ähnlich die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Systems (A) für das charakteristische Anfangswertproblem bewiesen, bei dem  $x, y, z, p, q$  auf zwei sich schneidenden Charakteristiken (A)-genügend vorgegeben werden. Schließlich dasselbe für ein gemischtes Anfangswertproblem (auf einer Charakteristik sind  $x, y, z, p, q$  und auf einer diese Charakteristik schneidenden nicht, charakteristischen Kurve zwei Relationen vorgegeben, die homogen linear in den Ableitungen der fünf Unbekannten in Richtung der Tangente der eben genannten Kurve sind).  
Stellmacher (Göttingen).

Gårding, Lars: Une propriété caractéristique des équations hyperboliques à coefficients constants. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 731—732 (1949).

Vorgelegt die Differentialgleichung (1)  $q(\partial/\partial x)f(x) = 0$  in  $n$  reellen Veränderlichen  $x_v$ .  $q = p + r$  ist ein Polynom mit konstanten Koeffizienten,  $p$  ist homogen und  $r$  von geringerem Grad als  $p$ . Verf. fand die folgende Definition

(dies. Zbl. 30, 359): Die Differentialgleichung (1) ist hyperbolisch bezüglich des reellen Vektors  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , falls  $p(\xi) \neq 0$  und falls  $q(t\xi + i\eta) \neq 0$  für jeden reellen Vektor  $\eta$  und jedes  $t > t_0$  ( $t_0$  passend gewählt). — Es gilt dann das Theorem: die Differentialgleichung (1) ist dann und nur dann hyperbolisch, wenn der folgende Satz richtig ist: [Sei  $A(q)$  die Menge aller (komplexen) Funktionen, die Lösung von (1) und unendlich oft differenzierbar sind]: Wenn jede Folge von Funktionen  $f_1(x) \cdots f_k(x) \cdots$  aus  $A(q)$ , die mit allen Ableitungen der  $f_k$  in jedem kompakten Bereich der Ebene  $(x, \xi) = 0$ , gleichmäßig wie  $1/k$  gegen Null strebt, so gilt das gleiche auch im ganzen Raum. *Stellmacher* (Göttingen).

**Amerio, Luigi:** Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 5, 313—319 (1948).

Das Cauchysche Anfangswertproblem für die Differentialgleichung  $E_k(u) = (\partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2 - \partial^2/\partial x_3^2 - \cdots - \partial^2/\partial x_m^2 + \lambda)^k u = f(x)$ ,  $2k > m - 2$ , für nicht-charakteristische verschwindende Anfangswerte wird mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst unter Benutzung der Grundlösung

$$G = ((2\pi)^{(m-2)/2} \cdot 2^{2k} \cdot (k-1)!)^{-1} \cdot (2r/\sqrt{\lambda})^{k-(m/2)} J_{k-(m/2)}(r\sqrt{\lambda}).$$

Dabei ist  $r = r(P-Q)$  der Abstand der beiden Argumentpunkte  $P$  und  $Q$ , gemessen mit der indefiniten Metrik. Der Fall  $2k < m - 2$  wird erledigt durch Zurückführung auf den Fall  $2k > m - 2$ . *Stellmacher* (Göttingen).

**Amerio, Luigi:** Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 48—52 (1949).

Die in der ersten Mitteilung (s. vorsteh. Referat) gewonnene Lösungsformel wird erneut abgeleitet in gewisser Verallgemeinerung der bekannten Methode von M. Riesz [Soc. Math. de France, Conf. Réunion. intern. Math., Paris 1937 (1938)] (vgl. dazu auch Gårding, dies. Zbl. 30, 359). *Stellmacher* (Göttingen).

**Amerio, Luigi:** Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 175—180 (1949).

Die in der ersten Mitteilung (s. vorsteh. Referate) benutzte Grundlösung wird gewonnen als diejenige Funktion, deren Laplacesche Transformierte gleich  $(p_1^2 - p_2^2 - \cdots - p_m^2 + \lambda)^{(\alpha+m)/2}$  ist mit  $\alpha + m = 2k$ . *Stellmacher* (Göttingen).

**Bureau, Florent:** Quelques questions de géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 155—176 (1950).

Historischer Rückblick und Überblick über die Integraltheorie des Anfangswertproblems partieller totalhyperbolischer Differentialgleichungen unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenhanges mit der Theorie Abelscher Integrale.

*Stellmacher* (Göttingen).

**Kunugui, Kinjiro:** Étude sur la théorie du potentiel généralisé. Osaka math. J. 2, 63—103 (1950).

Étude du potentiel dans l'espace euclidien à  $m \geq 2$  dim. pour un noyau  $\Phi(h(r))$  où  $h(r) = r^{2-m}$  ( $m > 2$ ) ou  $\log 1/r$  ( $m = 2$ ).  $\Phi(t)$  est continue croissante convexe non constante  $\geq 0$  avec la condition (C):  $\int_0^1 \Phi(h(r)) r^{m-1} dr$  fini. [ $\Phi(h(r))$  est donc sous-harmonique]. On étend à ce cas les théorèmes classiques du cas newtonien (Gauss-Frostman; voir la thèse de Frostman, Lund, 1935; ce Zbl. 13, 63): capacité (intérieure), principe du maximum (sans C), théorèmes d'équilibre et du balayage (sans C, mais pour le second théorème en supposant  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$ ); enfin théorème fondamental sur l'intégrale d'énergie ( $\geq 0$ , nulle seulement s'il n'y a pas de masses)



où la transformation de Fourier est utilisée. Il y aurait intérêt à rapprocher ces développements des études récentes paraissant inconnues de l'A., de H. Cartan [Bull. Soc. math. France **69**, 71—96 (1941); ce Zbl. **26**, 227; voir aussi l'analyse suivante] et J. Deny (ce Zbl. **34**, 362). Signalons que dans un corollaire (de Frostman) p. 86, la propriété que le potentiel n'est pas augmenté doit être incorporée aux conditions d'unicité.

**Brelot (Grenoble).**  
**Cartan, Henri: Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien.** Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., II. S. **22**, 221—280 (1947).

In Form einer Monographie gibt Verf. eine, was die betrachteten Punktmengen anlangt, völlig allgemeine und die Terminologie vereinheitlichende Darstellung der Balayage-Methode, die Poincaré erstmalig zur Behandlung des Dirichletschen Problems der Potentialtheorie entwickelt hat; das ist nunmehr eine keine ernstlichen Schwierigkeiten bietende, vom Verf. aber absichtlich beiseitegelassene Anwendung der von de la Vallée Poussin durch Feststellung der Existenz der Grenzverteilung der Massen zu einer wirklichen Lösungsmethode ausgestatteten Theorie. — Die behandelten Probleme finden sich z. T. auch in einer Abhandlung von Brelot, J. Math. pur. appl. IX. S. **24**, 1—32 (1945), der jedoch mit den Potentialen bzw. subharmonischen Funktionen  $\geq 0$  operiert. Die Darstellung des Verf. ist so überaus konzentriert und reich an weittragenden Überlegungen, die trotz der geometrischen Interpretation im Hilbert-Raum naturgemäß sehr abstrakt sind, daß sich Ref. mit einer Wiedergabe einiger eigener, den Standpunkt charakterisierenden Worte des Verf. aus seiner Einleitung (in deutscher Übersetzung) begnügen muß: „Das Originale der vorliegenden Arbeit besteht vor allem darin, daß die Probleme systematisch vom Standpunkt der Verteilung der Massen angegriffen werden. Zuerst, für den Fall der Verteilungen von endlicher Energie, nehme ich die Minimummethoden, deren ursprüngliche Idee auf Gauß zurückgeht und die von O. Frostman [Thèse, Lund 1935; dies. Zbl. **13**, 63] und de la Vallée Poussin [Actual. sci. industr. Nr. 578, Paris 1937; dies. Zbl. **19**, 262] wieder zu Ehren gebracht worden sind. Aber, im Gegensatz zu diesen Autoren, suche ich die Lösung der Minimumprobleme durch Benutzung moderner Techniken des Hilbertschen Raumes, was jede überflüssige Hypothese zu eliminieren und das Auswahlprinzip zu vermeiden gestattet. Dann führe ich den Fall beliebiger Verteilungen auf den der Verteilungen von endlicher Energie zurück dank der Einführung einer neuen Topologie in der Gesamtheit der Massenverteilungen (siehe im § 2 die Definition der „topologie fine“). Auf diese Weise folgt die Theorie der irregulären Punkte der allgemeinen Balayage-Theorie, anstatt ihr vorauszugehen. Jene fließt sozusagen natürlich aus dieser“. — Mögliche Verallgemeinerungen dieser Theorie der Balayage und Kapazität, was eng verbunden ist, werden angedeutet: auf Potentiale der Ordnung  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$  von M. Riesz und Frostman, weiter Ersetzung der „Fundamentallösung“ durch die „Greensche Funktion“ bezüglich einer offenen Menge  $\Omega$ , endlich auf Mengen  $\Omega$ , die den „unendlich fernen Punkt“ enthalten.

*E. Hölder (Leipzig).*

**Sobrero, Luigi: Un metodo di approssimazioni successive per la risoluzione del problema di Dirichlet.** Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. **3**, 67—93 (1950).

Considérons dans un domaine plan  $\omega$  le passage d'une fonction  $u(x, y)$  à celle  $u_1$  valant en  $(x, y)$  la moyenne de  $u$  sur la circonférence de centre  $(x, y)$  et rayon égal à la distance de  $(x, y)$  à la frontière. Lorsqu'on itère le procédé à partir d'une fonction continue finie  $f$  dans  $\omega$ , la suite converge vers la solution du problème de Dirichlet (valeurs  $f$  à la frontière) lorsqu'elle existe [Lebesgue, C. r. Acad. Sci., Paris **154**, 335—337 (1912)] ou en général vers la solution généralisée [Perkins, C. r. Acad. Sci., Paris **184**, 182—183 (1927)]. L'A. approfondit cette convergence et montre, en supposant qu'en tout point-frontière existe un cercle tangent extérieur de rayon  $> \rho$  fixé  $> 0$ , que la différence entre la  $n^{\text{e}}$  fonction et la limite est majorée

par  $(a + b n)^{-2}$  ( $a, b$  constantes): il en détaille l'application pratique à la résolution du problème classique de Dirichlet. *Brelot* (Grenoble).

**Germain, Paul et Roger Bader: Problème de Dirichlet pour une équation du type mixte.** C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1824—1826 (1950).

Per il problema di Dirichlet relativo all'equazione

$$k(y) \partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = F(x, y),$$

dove  $k(y)$  è supposto  $> 0$  per  $y > 0$  e  $= 0$  per  $y = 0$ , quando il dominio, sulla cui frontiera  $\Gamma$  sono prescritti i valori per la  $z(x, y)$ , è situato nel semipiano  $y \geq 0$  e  $\Gamma$  comprende un segmento dell'asse  $x$ , l'A. schizza brevemente una trattazione intesa a dimostrare esistenza e unicità della soluzione, seguendo fedelmente il metodo variazionale esposto, per il caso delle equazioni di tipo ellittico, nel 2. volume dei „Methoden der Mathematischen Physik“ di R. Courant e D. Hilbert, Berlin 1937; dies. Zbl. **17**, 397. *G. Cimmino* (Bologna).

**Garnir, Henri: Les problèmes aux limites pour l'équation  $\Delta u = k^2 u$  dans une bande.** Rev. sci., Paris **87**, 33 (1949).

L'A. dà una nuova espressione della funzione di Green relativa al problema indicato nel titolo, per il caso di due come per quello di tre dimensioni. *Cimmino*.

**Snow, Chester: Potential problems and capacitance for a conductor bounded by two intersecting spheres.** J. Res. nat. Bur. Standards **43**, 377—407 (1949).

Gegeben seien zwei sich durchsetzende Kugeln; auf der äußeren Oberfläche  $F$  des durch diese Kugeln begrenzten Körpers seien Potentialwerte vorgeschrieben, die nur von der Koordinate längs der Symmetrieachse dieses Körpers abhängen. Überdies befinde sich dieser Körper in einem äußeren axialsymmetrischen elektrostatischen Feld mit gleicher Symmetrieachse. Für das elektrostatische Potential außerhalb von  $F$  werden formale Reihen und Integrale hergeleitet. Sie beruhen auf der Entwicklung willkürlicher Funktionen  $f(x)$  in ein Integral über Legendresche Funktionen  $P_\mu(x)$  oder  $Q_\mu(x)$  nach dem Index  $\mu$  längs einer Parallelen zur imaginären  $\mu$ -Achse. — Die Kapazität des Körpers mit der nun als leitend angenommenen Oberfläche  $F$  wird in eine Reihe entwickelt, die so gut wie die Reihe mit dem allgemeinen Glied  $n^{-14}$  konvergiert. Falls der Winkel  $\omega$  zwischen den beiden Kugeln ein rationaler Bruchteil von  $2\pi$  ist, läßt sich die Kapazität in endlicher Form mit Hilfe von vollständigen elliptischen Integralen ausdrücken. Ebenso wird das Potential für  $\omega = n\pi/m$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ;  $m =$  beliebig positiv ganz) in endlicher Form dargestellt. *J. Meixner* (Aachen).

**Sestini, Giorgio: Sopra la conduzione del calore in una piastra sottile limitata da due circonferenze concentriche.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 125—137 (1949).

L'A. considera il problema della determinazione della temperatura  $T$  nei punti di una piastra sottile, limitata da due circonferenze concentriche di raggi  $r_1 < r_2$ , nell'ipotesi che  $T$  sia funzione del tempo  $t$  e della sola distanza  $r$  dal centro della piastra. Si suppongono assegnate la temperatura iniziale  $f(r)$  della piastra ed i valori  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  che essa deve assumere sui bordi. Il problema é dunque tradotto dalle

$$(1) \quad K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = aT - b, \quad T(r, 0) = f(r), \quad T(r_1, t) = \varphi_1(t), \quad T(r_2, t) = \varphi_2(t)$$

( $K, a, b$  = costanti). — Dopo aver dato una dimostrazione diretta del teorema di unicità, l'A., con la posizione  $T = e^{-at} u + v$ , spezza il problema (1) nei due seguenti:

$$(2) \quad K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(r, 0) = f(r), \quad u(r_1, t) = e^{at} \varphi_1(t), \quad u(r_2, t) = e^{at} \varphi_2(t);$$

$$(3) \quad K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} = av - b, \quad v(r, 0) = 0, \quad v(r_1, t) = 0, \quad v(r_2, t) = 0.$$

Il problema (3) é risolto col metodo della trasformazione di Laplace; il problema (2)



sfruttando risultati già noti. Si arriva così alla formula risolutiva del problema (1). Del problema (2) è anche determinata la funzione di Green, attraverso la sua trasformata di Laplace.

*Aldo Ghizzetti* (Roma).

### Variationsrechnung:

● Bliss, Gilbert A.: *Lectures on the calculus of variations*. Chicago, Ill.: The University of Chicago Press, 1947. IX, 296 S.

Bliss gehört nach Osgood und namentlich Bolza zu den Hauptlehrern der Variationsrechnung in Amerika. Es ist höchst dankenswert, daß die dort in mimeographischer Form schon lange bekannten Ausarbeitungen seines Anfängerkurses in Variationsrechnung nun in gedruckter Form dem internationalen mathematischen Leserkreis vorliegen. Sie bilden den I. Teil des hier zu besprechenden Buches. Die Betrachtung seiner 6 Kapitel spielt sich meist in anschaulichen dreidimensionalen Raum ab, ist aber, auch was die Felder anlangt, ohne weiteres auf den  $n + 1$ -dimensionalen Raum zu verallgemeinern. Das geschieht in Kapitel IV. Das V. Kapitel bringt eine selbständige Behandlung der Probleme in Parameterform. Das VI. Kapitel behandelt die Probleme mit variablen Endpunkten, die — gegenüber denen mit festen Endpunkten früher oft vernachlässigt — der Verf. so gefördert hat. Auch die drei grundlegenden Eingangskapitel (I. Variationsrechnung im dreidimensionalen Raum, II. Hinreichende Bedingungen für ein Minimum, III. Felder und die Hamilton-Jacobische Theorie) enthalten bereits viele, z. T. klassisch gewordene Beiträge des Verf.: die Anwendung der Existenzsätze für implizite Funktionen und Lösungen von Differentialgleichungen, die in einem 13 Seiten starken Anhang dargestellt sind, den schönen Blisschen Beweis der Jacobischen Bedingung durch Verwendung der zweiten Variation für ein neues, akzessorisches Problem und der damit gegebenen Transformation derselben. Auch Beiträge der Schule von Bliss, insbesondere von Hestenes, werden bereits in den Grundlagen (II. Kap.) verarbeitet. Jedem Kapitel ist eine Einleitung vorangestellt, die über das betreffende Problem, ihre Geschichte und Literatur informiert. Wegen genauer Behandlung von Beispielen verweist Bliss auf seinen einführenden *Calculus of variations*, der ja auch in deutscher Übersetzung von Schwank vorliegt (Leipzig und Berlin 1932; dies. Zbl. 3, 348). — Eine eigene Gesamtdarstellung gibt Bliss im ca. 80 Seiten starken II. Teil vom Problem von Bolza. Eine (offenbar für den Kenner bestimmte) erste relativ vollständige Darstellung in Buchform, wie Verf. hervorhebt, mit einer Liste wichtiger neuerer, hauptsächlich in Amerika erschienener Literatur dazu. In der Tat verzichtet Morse, dem das Problem von Bolza eine so große Förderung verdankt, im einleitenden Teil seines „*The Calculus of variations in the large*“ auf die Darstellung der Variationsprobleme mit Nebenbedingungen. — Carathéodory hat bereits 1926, lange vor dem Erscheinen seines Lehrbuches in einer Arbeit in den *Acta math.* 47, 199—236 (1926), die Bliss seltensamerweise nirgends erwähnt, sich sehr deutlich für einen anderen ersten Zugang zum Problem von Lagrange ausgesprochen. Er sagt S. 204: „Glücklicherweise kann man aber der Behandlung dieser Fragen (nämlich der Randwertaufgaben der eigentlichen Variationsrechnung mit differentiellen Nebenbedingungen) eine viel einfachere Theorie voranstellen, bei der die genannte Punktmenge  $A$  (NB., das ist diejenige der Punkte  $P_2$ , die von einem gegebenen Punkt  $P_1$  längs Kurven erreicht werden können, die den differentiellen Nebenbedingungen genügen, Ref.) keine Rolle spielt, und deren Ergebnisse ein Universalinstrument liefern, das alle Probleme, die wir erwähnt haben, und noch viele andere zu behandeln erlaubt“. Diese geometrische Methode liefert fast unmittelbar die Weierstraßsche  $E$ -Funktion, das Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral, endlich alle Relationen, aus denen die Hamilton-Jacobische Theorie besteht, ohne daß man von vornherein ein Extremalenfeld konstruieren müßte. In den kanonischen Variablen sind dann alle Schwierigkeiten, die aus den Nebenbedingungen entstehen, von selbst eliminiert; lediglich ist jetzt die Hessesche Matrix der Hamilton Funktion für ein reguläres Extremalelement nur positiv semidefinit vom Rang  $n - p$ , wenn  $p$  Differentialgleichungen als Nebenbedingungen gestellt sind. Diese Dinge kommen bei Bliss nicht so überzeugend zum Ausdruck; er bleibt auch in der Bezeichnung oft bei einer gemischten, nicht rein kanonischen Wahl der Variablen. Damit hängt zusammen, daß auch die Randbedingung nicht in der äußerst handlichen Normalform von Morse angenommen wird. — Im Kap. VII (Die Multiplikatorenregel) werden die drei theoretisch äquivalenten Probleme von Bolza, Mayer und Lagrange genau formuliert und in ihren Beziehungen zueinander studiert. Aus dem Bolzaschen Problem können die beiden anderen am leichtesten als bloße Spezialfälle gewonnen werden. Ein fundamentales Einbettungslemma, welches auch ohne alle Normalitätsannahme gilt, gibt für die erste Variation des Extremalintegrals  $J$  die sog. Multiplikatorenregel als erste notwendige Bedingung für ein Minimum von  $J$ . Die in ihr vorkommenden Multiplikatoren  $l_0, l_\beta(x)$  geben Anlaß zum Begriff der Abnormalität der Ordnung  $q$ . Es existieren dann  $q$  linear unabhängige Systeme von Multiplikatoren mit  $l_0 = 0$ . Er stimmt im wesentlichen mit dem Klassenbegriff Carathéodorys überein. Das Kap. VIII (Weitere notwendige Bedingungen für ein Minimum) gibt als weiteres Resultat der Untersuchungen von Bliss, Morse und Myers, Graves und MacShane die weiteren notwendigen Bedingungen von Weierstraß und von Clebsch ohne jede Normalitäts-

voraussetzung. Dies geht über die hauptsächlich hinreichenden Resultate von Carathéodory hinaus. Hier wird der Ausdruck der zweiten Variation aufgestellt, das akzessorische Minimumproblem formuliert und kurz studiert und eine vierte notwendige Bedingung für das Minimum analog zu der von Jacobi aufgestellt, wenigstens für einen normalen Minimalbogen ohne Ecken.

Das Eigenwertproblem, welches mit der zweiten Variation verknüpft ist, wird erst im folgenden Kapitel IX (Hinreichende Bedingungen für ein Minimum) kurz besprochen. Außer der dort angeführten Literatur wären namentlich die fundamentalen Untersuchungen von Morse in seinem Buch *The Calculus of Variations in the large*, New York 1934; dies. Zbl. 11, 28 zu nennen, namentlich Kap. IV (Self-adjoint systems), welche großenteils auch für die kanonischen Hamiltonschen Systeme des Bolzaschen Problems Gültigkeit behalten. Die Ausdehnung der Eigenwerttheorie und der Entwicklungssätze auf den anomalen Fall hat Ref. in einer umfangreichen Arbeit „Entwicklungssätze der Theorie der zweiten Variation. Allgemeine Randbedingungen“ [Acta math. 70, 193—242 (1939); dies. Zbl. 20, 134] gegeben.

Das letzte IX. Kap. des Blisschen Buches bringt hinreichende Bedingungen für ein Minimum im wesentlichen nach einer Methode von Hestenes, die sich auch auf wichtige anomale Fälle bezieht. Bliss zeigt, wie diese auf den normalen Fall reduziert werden können, wie er überhaupt bezüglich der im anomalen Fall erzielbaren Resultate einigermaßen skeptisch ist. Nur in der Bibliographie wird hingewiesen auf den Beweis der hinreichenden Bedingung durch „Expansion Methods“ von Reid [Trans. Amer. math. Soc. 42, 183—190 (1937) und Ann. Math., II. S. 38, 662—678 (1937); dies. Zbl. 17, 267] [zu denen Ref. noch auf seine an v. Escherich und die Lichtenstein-Schwarzsche Art der Eigenwerttheorie anschließende Beweisskizze im Jahrbuch der Luftfahrtforschung 1940 hinzuweisen sich gestattet]. E. Hölder (Leipzig).

Hove, Léon van: Sur le signe de la variation seconde des intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8°, II. S. 24, Nr. 5, 68 S. (1949).

Die zweite Variation des Integrals  $J = \int_D F(x_1, \dots, x_\mu, z_1, \dots, z_n, p_{11}, \dots, p_{n\mu}) dx$  ( $p_{j\alpha} = \partial z_j / \partial x_\alpha$ ,  $dx = dx_1 \cdots dx_\mu$ ) lautet (über doppelte Indizes summieren!)

$$\delta^2 J = \int_D (F_{z_j z_k}^0 \zeta_j \zeta_k + 2 F_{z_j p_{k\beta}}^0 \zeta_j \zeta_{k\beta} + F_{p_{j\alpha} p_{k\beta}}^0 \zeta_{j\alpha} \zeta_{k\beta}) dx$$

( $\zeta_{j\alpha} = \partial \zeta_j / \partial x_\alpha$ ;  $\zeta_j = 0$  auf dem Rand von  $D$ : Problem mit festem Rand; der Index 0 bezieht sich auf eine feste Extremale  $z_j^0$ ). Die notwendige bzw. hinreichende (L. van Hove, dies. Zbl. 29, 268) Bedingung von Legendre-Hadamard für das Minimum im Kleinen ist

$$(*) \quad F_{p_{j\alpha} p_{k\beta}}^0 \zeta_j \zeta_k \eta_\alpha \eta_\beta \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad > 0.$$

Verf. stellt sich die Aufgabe, nicht die Jacobische, sondern die Lichtensteinsche Methode zur Untersuchung der zweiten Variation zu verallgemeinern, bei der die Jacobische Differentialgleichung durch einen Eigenwertparameter erweitert wird und man, bei erfüllter hinreichender Legendre-Bedingung,  $\lambda_1 \geq 1$  ( $> 1$ ) als notwendige (hinreichende) Bedingung für das schwache Minimum bei festem Rand erhält, wo  $\lambda_1$  der kleinste positive Eigenwert [bei Lichtenstein, Mh. Math. Phys. 28, 3—51 (1917), Math. Z. 5, 26—51 (1919)], für  $n = 1$ ,  $\mu = 2$ ). Da dies auf den Fall  $n$  und  $\mu > 0$  nicht ohne weiteres übertragbar ist, betrachtet Verf. die Funktionensysteme  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  als Elemente eines Hilbertschen Raumes, in dem  $\int_D (\zeta_j \zeta_j' + \zeta_{j\alpha} \zeta_{j\alpha}') dx$  als skalares Produkt und Grundlage der Metrik eingeführt

wird und der durch Grenzfunktionen („Funktionen von Beppo Levi“, mit verallgemeinerten Ableitungen) „abgeschlossen“ wird. In diesem Raum definiert  $\delta^2 J$  bzw. die zugehörige Bilinearform einen beschränkten selbstadjungierten linearen Operator  $A$ .  $l_1$  sei die untere Grenze des Spektrums dieses Operators ( $l_1$  kann selbst Eigenwert sein oder nicht). Dann ist die Ungleichheit  $l_1 \geq 0$  äquivalent zu  $\delta^2 J \geq 0$  und  $l_1 > 0$  äquivalent zur Existenz eines  $\varepsilon > 0$ , so daß

$$\delta^2 J \geq \varepsilon \int_D (\zeta_j \zeta_j + \zeta_{j\alpha} \zeta_{j\alpha}) dx;$$

m. a. W., es ist  $l_1 \geq 0$  notwendig,  $l_1 > 0$  hinreichend für ein schwaches Minimum bei festem Rand. Daß die Ausgangsfläche die Lagrangeschen Gleichungen erfüllt,



wird natürlich vorausgesetzt, dagegen nicht die Legendre-Hadamardsche Bedingung; (\*) mit  $\geq$  ( $>$ ) folgt vielmehr aus  $l_1 \geq 0$  ( $> 0$ ). Falls  $\mu$  oder  $n$  den Wert 1 oder 2 hat (diese Fälle nehmen, wie man weiß, auch bez. der Legendre-Bedingung eine Ausnahmestellung ein), ist bei leichter Modifikation des Verfahrens  $A - 1$  ein vollstetiger Operator, das Spektrum von  $A$  also diskret mit 1 als einzigem Häufungspunkt. — Ist  $J$  quadratisch, also  $\delta^2 J = J$ , so wird man im Falle  $l_1 > 0$  das System der Lagrangeschen Gleichungen „vom elliptischen Typ“ nennen. Im letzten Abschnitt wird eine Anwendung auf solche Systeme und speziell auf Stabilitätsprobleme in der Elastizitätstheorie gegeben. Boerner (Gießen).

**Magenes, Enrico:** Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. S. 15, 113—125 (1950).

Si tratta di alcune condizioni sufficienti per la semicontinuità dei funzionali (sia in forma ordinaria sia in forma parametrica) relativi a problemi di Mayer e di Lagrange: tali condizioni erano state enunciate da L. Tonelli [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 24, 399—404 (1936); questo Zbl. 16, 121] senza dimostrazione. L'A. espone tali dimostrazioni, mostrando (come il Tonelli aveva fatto presente) in qual modo si utilizzano, con opportuni complementi, i ragionamenti che lo stesso Tonelli aveva già sviluppato per stabilire condizioni sufficienti per la semicontinuità di integrali semplici del calcolo delle variazioni. S. Cinquini (Pavia).

**Magenes, Enrico:** Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: II. Teoremi di esistenza dell'estremo. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 3, 95—131 (1950).

Proseguendo le ricerche di S. Faedo [Ann. Mat. pura appl., Bologna 23, 69—121 (1944); Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat. 4, 223—249 (1943)] e proprie [questo Zbl. 34, 363], l'A. si occupa dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali del Calcolo delle variazioni

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz,$$

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_a^c f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)) dx dz.$$

Si suppone che  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  sia una funzione definita e continua insieme con le proprie derivate parziali  $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_1 y'_2}, f_{y'_2 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$  in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di un campo  $A$  (che sia il prodotto topologico  $A_1 \times A_2$  di due campi  $A_1$  del piano  $(x, y_1)$ ,  $A_2$  del piano  $(z, y_2)$ , ciascuno dei quali contiene i propri punti di accumulazione posti al finito) e per tutti i valori finiti di  $y'_1, y'_2$ . Si chiama curva  $C$  ordinaria ogni coppia di funzioni assolutamente continue  $y = y_1(x)$ ,  $(a \leq x \leq b)$ ;  $y = y_2(z)$ ,  $(c \leq z \leq d)$ , per le quali esiste finito l'integrale (del Lebesgue)  $I(y_1, y_2)$ . — Mediante alcuni esempi l'A. rileva alcune novità che l'integrale  $I(y_1, y_2)$  presenta in confronto

al noto integrale  $\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ , e successivamente, attenendosi al metodo diretto del

Tonelli stabilisce alcuni teoremi esistenziali valevoli nel caso in cui il campo  $A$  sia limitato e si considerino classi  $K_\eta$  di curve ordinarie, per le quali esiste un numero  $\eta > 0$  in modo che per ogni curva della classe sono verificate le disuguaglianze  $d - c \geq \eta$ ,  $b - a \geq \eta$ . Di tali teoremi riportiamo il seguente: Si supponga che: 1) in tutti i punti di  $A$  e per ogni coppia  $y'_1, y'_2$  sia

$$f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0, \quad f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0;$$

2) esistano due campi  $A'_1, A'_2$ , contenenti come punti interni tutti i punti rispettivamente di  $A_1$  e  $A_2$  e tali che, posto  $A' = A'_1 \times A'_2$ , in  $A' - A$  si possa definire, per ogni coppia  $y'_1, y'_2$ , la funzione  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  in modo che in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  essa risulti continua assieme alle proprie derivate parziali

$$f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_1 y'_2}, f_{y'_2 y'_1}, f_{y'_2 y'_2};$$

3) in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  esistano finite e continue le derivate parziali  $f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_1 y_1}, f_{y_1 y_2}, f_{y_2 y_1}, f_{y_2 y_2}$ ; 4) esistano due funzioni  $\Phi_1(u), \Phi_2(u)$ ,  $(0 \leq u < +\infty)$  le quali siano inferiormente limitate, tali che sia  $\Phi_1(u): u \rightarrow +\infty, \Phi_2(u): u \rightarrow +\infty$  per  $u \rightarrow +\infty$ , e per le quali sia in tutto il campo  $A$  e per ogni coppia  $y'_1, y'_2$

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi_1(|y'_1|), \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi_2(|y'_2|).$$

Sotto queste ipotesi in ogni classe completa  $K_\eta$  di curve  $C$  ordinarie appartenenti al campo  $A$  esiste il minimo assoluto di  $I(y_1, y_2)$ . — Successivamente l'A. rileva in qual modo, attenendosi a procedimenti seguiti per tipi di integrali del Calcolo delle variazioni precedentemente considerati dal Tonelli, dal relatore e da altri autori, si perviene, sempre per l'integrale  $I(y_1, y_2)$ , a teoremi esistenziali valevoli nel caso in cui il campo  $A$  sia illimitato. — Per quanto riguarda l'integrale  $I(y)$ , tenuto presente che i campi  $A_1, A_2$  si intendono coincidenti, e che si chiama curva  $C$  ordinaria ogni funzione assolutamente continua  $y = y(x)$ , ( $a \leq x \leq b$ ), per la quale esiste finito l'integrale  $I(y)$ , l'A. rileva innanzi tutto che da ogni teorema esistenziale valido per  $I(y_1, y_2)$  segue, come caso particolare e sotto ipotesi più ampie, un teorema esistenziale per  $I(y)$ , valevole per classi complete di curve ordinarie per le quali esiste un numero fisso  $\eta > 0$  tale che, per tutte le curve della classe, è verificata la disuguaglianza  $b - a \geq \eta$ . — Inoltre l'A. stabilisce teoremi esistenziali valevoli per classi di curve per le quali non è soddisfatta la condizione ora citata, tra i quali riportiamo il seguente: Si supponga che la funzione  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  soddisfi alle condizioni 1), 2), 3) che sia inferiormente limitata e inoltre che esistano un numero  $Y' > 0$  e una funzione  $\Phi(u, t)$  definita per ogni coppia  $u, t$  con  $u \geq Y', t \geq \bar{Y}'$  e tale che sia  $\Phi(u, t): ut \rightarrow +\infty$  per  $ut \rightarrow +\infty$ , in modo che per  $|y'_1| \geq \bar{Y}', |y'_2| \geq \bar{Y}'$  sia verificata la disuguaglianza

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi(|y'_1|, |y'_2|).$$

Allora in ogni classe completa di curve  $C$  ordinarie appartenenti a un campo limitato esiste il minimo assoluto di  $I(y)$ . — Il lavoro termina rilevando in qual modo, in analogia a quanto l'A. ha fatto per l'integrale  $I(y_1, y_2)$ , si ottengono per l'integrale  $I(y)$  teoremi esistenziali valevoli in campi illimitati. S. Cinquini (Pavia).

**Baiada, Emilio:** Il problema isoperimetrico del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. S. 15, 97—112 (1950).

Si considera il problema isoperimetrico (in forma parametrica) di render minimo l'integrale  $F_C = \int_C F(x, y, x', y') ds$  nella classe  $K$  delle curve ordinarie  $C$  per le quali l'integrale  $G_C = \int_C G(x, y, x', y') ds$  assume un dato valore  $L$ . — L'A. illustra un notevole procedimento che estende il noto metodo dei moltiplicatori di Lagrange per i problemi di minimo condizionato del calcolo differenziale, e che consiste nel render minimo il funzionale

$$R_C(\lambda, \Phi) = F_C + \lambda G_C + \Phi(G_C),$$

ove  $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange, e  $\Phi(u)$  è una funzione definita per tutti gli  $u$  reali. — Se  $C(\lambda, \Phi)$  è una curva che rende minimo  $R_C(\lambda, \Phi)$  e per la quale è  $G_{C(\lambda, \Phi)} = L$ , allora la curva  $C(\lambda, \Phi)$  rende minimo  $F_C$ , cioè è soluzione del problema isoperimetrico in questione. S. Cinquini (Pavia).

**Dedecker, Paul:** Sur une méthode de Bateman dans le probleme inverse du calcul des variations. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 774—792 (1949).

Ein System von  $n$  partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung  $F_a = 0$  für  $n$  Funktionen  $y^i$  in  $\mu$  Variablen  $x^\alpha$  läßt sich nach H. Bateman [Phys. Rev., II. S. 38, 815—819 (1931)] zu einem System von  $2n$  Gleichungen für  $2n$  Funktionen  $y^i, z^\alpha$  erweitern, das von einem Variationsproblem herrührt. Man nimmt als Lagrange-Funktion einfach  $L = z^\alpha F_\alpha$ . Dann sind die Lagrange-Gleichungen  $\delta L / \delta z^\alpha = F_\alpha = 0$  die gegebenen Gleichungen, während die anderen  $\delta L / \delta y^i = 0$  das zu den Variationsgleichungen der  $F_\alpha$  adjungierte System bilden. Formale Ähnlichkeit mit der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode bei  $r$  Nebenbedingungen  $F_\alpha = 0$ : normalerweise muß  $r < n$  sein, ist aber die Lagrange-funktion des Lagrange-Problems  $= 0$ , so kann  $r = n$  sein und dann sind die  $z^\alpha$  die Multiplikatoren. Die Invarianzeigenschaften bei allgemeinen Transformationen  $\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\beta), \bar{y}^i = \bar{y}^i(x^\beta, y^j)$  werden untersucht und Beispiele aus der Mechanik gegeben. Boerner (Gießen).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Tortorici, Paolo:** Soluzione approssimata di un'equazione integrale di Cantelli. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 75—86 (1948).



L'A. si occupa di un'equazione integrale proposta da F. P. Cantelli [Atti Accad. naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 12, 395—411 (1918)] e traducendo il seguente problema: data una variabile casuale normale  $X$ , ricercare se esiste un'altra variabile casuale normale  $Y$  (con varianza dipendente dal valore  $x$  assunto da  $X$ ) tale che la  $X + Y$  risulti pure normale. Detta equazione integrale si scrive

$$(1) \quad F(x) \equiv (2\pi\mu)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2[f(x) - f - \mu] + \alpha x - x^2/2\mu\right) dx = 1,$$

essendo

$$(2) \quad f = (2\pi\mu)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\mu} f(x) dx,$$

ed ha evidentemente la soluzione  $f(x) = \bar{f} = \text{costante}$  (in corrispondenza al caso classico che  $X, Y$  siano indipendenti); si tratta di studiare se la (1) possa avere altre soluzioni  $f(x)$  (non costanti). L'A. stabilisce alcune proprietà generali di (1), (2), fra cui quella della loro equivalenza al sistema delle infinite equazioni integrali  $F^{(s)}(0) = 0$ , ( $s = 2, 3, 4, \dots$ ) [le  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) = 0$  sono soddisfatte di per sé]. Successivamente, proponendosi la ricerca di soluzioni  $f(x)$  quasi continue, limitate e di quadrato sommabile in  $(-\infty, +\infty)$ , dimostra che la  $f(x) - \bar{f}$  può essere sviluppata in serie di funzioni di Hermite, convergente in media:

$$f(x) - \bar{f} \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x) \quad \text{con} \quad w_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2\mu} d^k e^{-x^2/2\mu} / dx^k.$$

Con ciò il problema è ridotto al calcolo dei coefficienti  $c_k$ . La determinazione dei  $c_k$  non è data, ma l'A. si propone di approssimare  $c_k$  mediante i numeri  $c_k^{(p)}$  ( $p = k, k+1, k+2, \dots$ ), così definiti: per ogni fissato  $p$ , ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ), la combinazione lineare  $\varphi_p(x) = \sum_{k=0}^p c_k^{(p)} w_k(x)$  verifica le  $p$  condizioni  $F^{(s)}(0) = 0$  ( $s = 2, 3, \dots, p+2$ ). Il calcolo è eseguito fino a  $p = 4$ ; dall'esame dei risultati ottenuti parrebbe che possano effettivamente esistere soluzioni  $f(x)$  non costanti. Occorrerebbe spingere molto più innanzi il calcolo per avere maggiori indicazioni.

Aldo Ghizzetti (Roma).

Cameron, R. H. and W. T. Martin: Non-linear integral equations. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 629—642 (1950).

Es werden Integralgleichungen der Form (1)  $y(t) = x(t) + \int_0^t F(t, s, x(s)) ds$  betrachtet, wo  $F(t, s, u)$  in  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,  $-\infty < u < \infty$  stetig ist und einer gleichmäßigen Lipschitzbedingung  $|F(t, s, u_2) - F(t, s, u_1)| < M |u_2 - u_1|$  genügt. Gehört  $x(t)$  zu der Klasse  $C$  der in  $0 \leq t \leq 1$  stetigen und in  $t = 0$  verschwindenden Funktionen, so gehört  $y(t)$  ebenfalls zu  $C$ ; umgekehrt gehört zu jedem  $y$  aus  $C$  ein eindeutiges  $x$  aus  $C$ , so daß die Transformation (1) eine eineindeutige Abbildung von  $C$  auf sich liefert. Sind die Grenzen des Integrals 0 und 1 und ist zusätzlich  $M < 1$  und  $F(0, s, u) \equiv 0$ , so gilt dasselbe. Daher wird bei den Beweisen gleich die allgemeinere Gleichung (2)  $y(t) = x(t) + A(x(t))$  betrachtet, wo das Funktional  $A$  so gewählt ist, daß die Gleichung eine eineindeutige Transformation  $T$  von  $C$  in sich liefert. Der Gedanke der Lösung ist folgender: Die eindeutige Umkehrung von  $T$  heiße  $x(t) = T^{-1}(y(t))$ . Gehört für ein festes  $t$  das Funktional  $T^{-1}(z(t))$  zu  $L_2(C)$ , so läßt sich nach der von den Verff. (dies. Zbl. 29, 143) entwickelten Theorie  $x(t)$  in eine Fourier-Hermite'sche Reihe

$$x(t) = T^{-1}(y|t) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \Psi_{m_1 \dots m_n}(y) A_{m_1 \dots m_n}(t)$$

entwickeln. Dabei ist  $\Psi_{m_1 \dots m_n}(y) = \prod_{j=1}^n H_{m_j} \left[ \int_0^1 \alpha_j(t) dy(t) \right]$ , wo  $H_n(u)$  das Her-

mitesche Polynom und  $\{\alpha_n(t)\}$  ein vollständiges Orthonormalsystem von Funktionen aus  $L_2$  bedeutet. Die Koeffizienten werden durch das Wiener'sche Integral

$A_{m_1 \dots m_n}(t) = \int_C^w T^{-1}(z|t) \Psi_{m_1 \dots m_n}(z) d_w z$  gegeben. Diese Lösung hat aber nur Sinn,

wenn man bereits weiß, daß das Lösungsfunktional  $T^{-1}(z|t)$  zu  $L_2(C)$  gehört, und wenn die Lösung  $T^{-1}(z|t)$  für alle  $z$  in  $C$  bekannt ist. Diese Schwierigkeiten werden dadurch eliminiert, daß unter einschränkenden Bedingungen für  $T$  das Wiener'sche Integral für die Koeffizienten mittels der von den Verff. (dies. Zbl. 35, 73) entwickelten Transformationstheorie in die Form

$$A_{m_1 \dots m_n}(t) = \int_C^w z(t) \Psi_{m_1 \dots m_n}[T(z|\cdot)] J_1(z) d_w z$$

übergeführt wird, wo  $J_1(z)$  ein bekanntes Funktional ist, das von  $z$  und  $T$  abhängt, aber keine Kenntnis der Lösung erfordert. — In der Arbeit wird zunächst ein Satz über die allgemeine Transformation (2) bewiesen, sodann werden hieraus zwei Sätze über die Integralgleichung (1) mit variabler bzw. fester oberer Grenze abgeleitet.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Heinhold, J.: Einige mittels Laplace-Transformation lösbare Integralgleichungen. I. Math. Z., Berlin 52, 779—790 (1950).

Verf. behandelt die Integralgleichungen

$$y(t) = \alpha \int_0^t \frac{J_1(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} y(\tau) d\tau = G(t)$$

und

$$\int_0^t J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) y(\tau) d\tau = G(t) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) y(\tau) dt = G(t)$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

W. Schmeidler (Berlin).

Bose, S. K.: A study of the generalised Laplace integral. I. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 9—27 (1949).

Gegenstand der Arbeit ist die von R. S. Varma [Current Sci. 16, 17—18 (1945)] eingeführte, im folgenden mit  $\mathfrak{B}_{k,m} = \mathfrak{B}$  bezeichnete, durch Whittakers konfluente hypergeometrische Funktionen  $W_{k,m}$  bewirkte Integralabbildung

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty (2px)^{-1/4} W_{k,m}(2px) h(x) dx \quad \text{kurz} \quad \varphi(p) \stackrel{k}{m} h(x),$$

die für  $k = 1/4$ ,  $m = \pm 1/4$  in die Laplacesche  $\mathfrak{L}$  übergeht,

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x) dx, \quad \text{kurz} \quad \varphi(p) \div h(x),$$

übrigens auch weitere bemerkenswerte Sonderfälle einschließt. — Der erste Abschnitt bietet die  $\mathfrak{B}$ -Bilder der Funktionen  $h(x) = x^n$  (das Bild, wenn  $\Re p > 0$ , ist  $p^{-n}$  mit einem etwas weitläufigen festen Maileil);  $h(x) = {}_1F_1(\alpha; \beta; -qx) x^n$ ;  $x^2 \exp(-x^2/2)$ ;  $x^{-n} e^{-a/x}$ ;  $x^{2/2} \exp(-\sqrt{x})$ ;  $x^{n/2} J_n(2\sqrt{x})$ ;  $x^\mu e^{-ax} J_n(bx)$ ;  $J_\mu(x) J_\nu(x)$ ;  $x^h J_{m,n}(x)$  (Humberts Funktion);  $K_r(x/2)$ ; Funktionen von Struve mit reeller und imaginärer, solche von Bessel mit imaginärer Veränderlichen;  $x^\lambda W_{\mu,\nu}(x)$ ; als Sonderfall Webers Funktion des parabolischen Zylinders;  $x^{3/2-3/2} e^{x/4} W_{-r,\lambda}(x)$ ; Kelvins Funktionen;  $x^{(\lambda-1)/2} (1+x)^{-n-1/2}$ ;  $e^{-1/x} x^\lambda (1+x)^\mu$ .

— Im zweiten Abschnitt verallgemeinert Verf. die Hauptregeln der Heavisideschen Rechenweise, z. B. mit der Feststellung, daß aus  $\varphi(p) \stackrel{k}{m} h(x)$  die Beziehung

$\int_0^\infty \varphi(q) q^{-1} dq \stackrel{k}{m} \int_0^x h(y) y^{-1} dy$  folgt. Sie liefert das Bild des Integralsinus. — Der



dritte Abschnitt gilt dem Satze I, der besagt, daß die Annahmen  $\varphi(p) \frac{k}{m} h(x)$  und  $h(p) p^{1-m_1} (1+p)^{-l_1} \doteq g(x)$  die Gleichung

$$p^{-1} \varphi(p) = \int_0^\infty g(s) G(s, p) ds \quad \text{mit} \quad p G(s, p) \frac{k}{m} e^{-xs} x^{m_1} (1+x)^{l_1}$$

nach sich ziehen. Verf. wendet ihn auf die Fälle an, daß

$$g(s) = [\Gamma(2m_1 + 2\mu - 1)]^{-1} e^{-s/2} s^{\mu+m_1-3/2} M_{n+k_1, \mu+m_1-1}(s);$$

$$g(s) = s^{n/2} J_n(2\sqrt{s}); \quad g(s) = e^{-s}; \quad g(s) = e^{-s}/\sqrt{s}$$

ist. L. Koschmieder (Tucumán).

**Bose, S. K.: A study of the generalised Laplace integral. II.** Bull. Calcutta math. Soc. 41, 59—67 (1949).

Seine vorstehend besprochene Abhandlung fortsetzend, stellt Verf. einen Satz II auf, in dem die Veränderliche der Zwischenfunktion  $h$  zu einer Potenz erhoben ist:

Wenn  $\varphi(p) \frac{k}{m} h(x)$  und  $p^{1-\lambda+\mu} h(p^\mu) \doteq g(x)$ ,

so gilt, die Konvergenz des Integrals vorausgesetzt, für  $\mu \geq 1$

$$p^{-1} \varphi(p) = \int_0^\infty W_\lambda^\mu(p/s^\mu) g(s) ds;$$

dabei ist

$$W_\lambda^\mu(p/s^\mu) = \frac{1}{(2p)^{\lambda/\mu}} \sum_r^{0, \infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\lambda/\mu + m + r/\mu + 1/4) \Gamma(\lambda/\mu - m + r/\mu + 1/4)}{r! \Gamma(\lambda/\mu - k + r/\mu + 3/4)} \cdot (s^{\mu/2} p)^{r/\mu} {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \lambda/\mu + m + r/\mu + 1/4, \lambda/\mu - m + r/\mu + 1/4 \\ \lambda/\mu - k + r/\mu + 3/4 \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right\}, \quad \Re(\lambda/\mu \pm m + 1/4) > 0$$

eine neue Funktion, die manche bekannte zum Sonderfalle hat, z. B. die Webersche. Für  $\mu = 1$  vereinfacht sich  $W_\lambda^\mu$  im wesentlichen zu einer Gaußschen Reihe. Verf. wendet den Satz II auf die Beispiele

$$g(s) = 2^\nu [\Gamma(2\nu - 2\lambda + 1)]^{-1} s^{2\nu-2\lambda} \exp(-s^2/2) {}_1F_1(-2\lambda + 1/2; \nu - \lambda + 1; s^2/2),$$

$$g(s) = \sqrt{\pi} 2^{-n} [\Gamma(n + 1/2)]^{-1} s^n J_{n-1}(s)$$

an. — Er wird in gewissem Sinne durch folgenden Satz III umgekehrt: Ist

$$\varphi(p) \doteq h(x) \quad \text{und} \quad p^{1-m_1} h(p) \frac{k}{m} g(x),$$

so gilt unter der Annahme der Konvergenz des Integrales  $\varphi(p) = \int_0^\infty g(s) T(s, p) ds$ , wo

$$T(s, p) = p \frac{\Gamma(m_1 + m + 5/4) \Gamma(m_1 - m + 5/4)}{(2s)^{m_1+1} \Gamma(m_1 - k + 7/4)} {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} m_1 + m + 5/4, m_1 - m + 5/4 \\ m_1 - k + 7/4 \end{matrix} ; \frac{1}{2} - \frac{p}{2s} \right\},$$

$\Re(\mu \pm m + 1/4) > 0$ ,  $\Re m_1 > 0$ ,  $\Re(m_1 \pm m + 5/4) > 0$ ,  $\Re p > 0$ ,  $g(x) = O(x^\mu)$  bei kleinen und  $g(x) = O(1)$  bei großen  $x$ . — Beispiel:  $g(x) = x^\alpha e^{-x}$ .

L. Koschmieder (Tucumán).

**Bose, S. K.: A study of the generalised Laplace integral. III.** Bull. Calcutta math. Soc. 41, 68—76 (1949).

**Bose, S. K.: Corrections to my paper on „A study of the generalised Laplace integral“.** Bull. Calcutta math. Soc. 41, 221—222 (1949).

In dieser zweiten Fortsetzung (vgl. vorsteh. Berichte) sucht Verf.  $\mathfrak{B}$ -Bilder  $\varphi(p)$  von Funktionen  $h(x)$ , die, mit  $x^2$  vervielfacht, die Eigenschaft  $R_\nu$  besitzen, bei der Hankelschen Abbildung der Ordnung  $\nu$  ihre eigenen Bilder zu sein. Wenn dem so ist, gilt Satz IV, daß — bei vorausgesetzter Konvergenz des Integrales —

$$\varphi(p^\mu) = \int_0^\infty y^{\lambda+1/2} h(y) S_\lambda^\mu(y/p^\mu) dy$$

ist, wo sich die Funktion  $S_\lambda^\mu(x)$  durch die Gaußsche Reihe in der Form

$$S_\lambda^\mu(x) = K_1 x^\nu \int_0^1 t^{-k+m-1/2} (1-t)^{\nu-\lambda-m+7/4} (1-t/2)^{-(k-m+1/2)} \\ \cdot {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \nu/2 - \lambda/2 + m/2 + 7/8, & \nu/2 - \lambda/2 + m/2 + 11/8 \\ \nu + 1 \end{matrix}; 16 x^2 (1-t)^2\right\} dt,$$

$K_1$  fest, ausdrücken läßt. — Schluß auf  $\mathfrak{B}_{1/4, \pm 1/4} = \mathfrak{L}$ . — Von Sonderfällen liefert  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 0$  ein Ergebnis von N. D. Tewari [Proc. Benares math. Soc. 7, 51–58 (1945)] wenn  $\mu = 1/2$ , bietet  $\mathfrak{L}$  ein solches von H. C. Gupta [J. Indian math. Soc. 9, 61–65 (1945)]. — Beispiel zu Satz IV:  $x^\lambda h(x) = x^{\nu+1/2} \exp(-x^2/2)$ . — Weitere beachtenswerte Sonderfälle:  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = \pm 1/2$ ;  $R_{1/2} = R_s$  ist die Fouriersche Sinus-,  $R_{-1/2} = R_c$  die Cosinus-Abbildung. Beispiele zu den zugehörigen beiden besonderen Formen des Satzes IV: Die Funktion  $D_{4n \pm 1}(x/\sqrt{2})$ , die von der Art  $\pm R_s$  ist;  $x \exp(-x^2/2)$ , von der Art  $R_s$ . Die Funktionen  $\exp(-x^2/2)$  und  $D_{4n}(x/\sqrt{2})$ , von der Art  $R_c$ . — S. 69, letzte Z., lies links  ${}_2F_1$  statt  ${}_1F_1$ .

L. Koschmieder (Tucumán).

Ames, Dennis B.: Certain inversion formulas for the Laplace transform. Proc. Amer. math. Soc. 1, 99–106 (1950).

Die Funktion  $F$  der reellen Variablen  $t$  habe die Periode  $2k$  und die Laplace-Transformierte  $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Wenn die Funktion  $F(t) e^{-xt}$  ( $x > 0$ ) im Intervall  $0 < t < 2k$  eine der Bedingungen erfüllt, die die Konvergenz ihrer Fourierreihe zum Funktionswert garantieren, so gilt die Umkehrformel:

$$F(t) = k^{-1} e^{xt} (1 - e^{-2kx})$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{2} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (u(x, n\pi/k) \cos(n\pi t/k) - v(x, n\pi/k) \sin(n\pi t/k)) \right]$$

für  $0 < t < 2k$ . Durch den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  kann man hieraus eine Umkehrformel für beliebiges  $F(t)$  mit absolut konvergenter Laplace-Transformation ableiten.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Gross, B.: Note on the inversion of the Laplace transform. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 41, 543–544 (1950).

Die Laplace-Transformierte von  $F(t)$  sei  $f(s)$ . Mit Hilfe von  $f(s)$  soll diejenige Funktion  $g(u)$  bestimmt werden, von der  $F(t)$  die Laplace-Transformierte ist. Da dann  $f(s)$  die iterierte Laplace-Transformierte von  $g(u)$ , also die Stieltjes-Transformierte von  $g(u)$  ist, wird unter gewissen Voraussetzungen  $g(u)$  durch die bekannte Umkehrformel der Stieltjes-Transformation geliefert. Die Methode wird durch ein Beispiel illustriert.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Varma, R. S.: An inversion formula for the generalized Laplace transform. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 126–127 (1949).

Die Transformation  $\Phi_m^k(s) = \int_0^\infty (2st)^{-\frac{1}{2}} W_{k,m}(2st) f(t) dt$ , wo  $W_{k,m}$  die Whittakersche Funktion bedeutet, geht für  $k = \frac{1}{4}$ ,  $m = \pm \frac{1}{4}$  in die Laplace-Transformation über. Letztere läßt sich z. B. dadurch umkehren, daß man auf beide Seiten die Mellin-Transformation anwendet, wodurch sich die Mellin-Transformierte von  $f(t)$  ergibt, und dann die bekannte Umkehrformel der Mellin-Transformation heranzieht. Auf dieselbe Weise ergibt sich im allgemeinen Fall ein komplexes Integral für  $f(t)$ , das eine hypergeometrische Funktion als Kern enthält. [Eine ähnliche Erweiterung der Laplace-Transformation nebst Umkehrung siehe bei C. S. Meijer, Proc. Akad. Wet., Amsterdam 44, 727–737, 831–839 (1941); dies. Zbl. 25, 184, 412; Anm. d. Ref.]

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Goodspeed, F. M.: The Mellin transform of functions defined by infinite series. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, III. S. 43, 15–20 (1949).

Nach einem von Hardy bewiesenen Resultat von Ramanujan (G. H. Hardy:



Ramanujan. Cambridge Univ. Press, 1940, chap. XI) wird die Mellin-Transformierte der Reihe  $\varphi(0) - x\varphi(1) + x^2\varphi(2) - + \dots = \Phi(x)$  durch  $\pi\varphi(-s)/\sin \pi s$  gegeben, wenn  $\varphi(s)$  gewisse Regularitätsbedingungen erfüllt. In der vorliegenden Arbeit wird die Reihe durch die allgemeinere  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_k)}{C'(\lambda_k)} x^{\lambda_k}$  ersetzt, wo die  $\lambda_n$  eine beliebige wachsende Folge von positiven Zahlen mit  $An \leq \lambda_n \leq Bn$  darstellen und  $C(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{\lambda_n^2}\right)$  ist. Die Mellin-Transformierte der Reihe wird dann unter der Bedingung  $\varphi(v + iw) = O(e^{Pv + Q|w|})$  für  $v \geq -\delta$  mit  $\delta > -\lambda_1$ ,  $Q < \pi/B$  durch  $\varphi(-s)/C(s)$  für  $-\lambda_1 < \Re s < \min(\lambda_1, \delta)$  dargestellt. Doetsch.

Cooper, J. L. B.: The uniquenesses of trigonometrical integrals. J. London math. Soc. 25, 61—63 (1950).

Eine Funktion  $f$  ist durch ihre Fourier-Transformierte (1)  $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iut} du$  (das Integral in einem bestimmten Sinn genommen) gewiß eindeutig bestimmt, wenn die Umkehrformel (2)  $f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-iut} dt$  in einem geeigneten Sinn gültig ist. In Proc. London math. Soc., II. S. 48, 292—309 (1944) zeigte der Verf. z. B.: Wenn das  $(C, n)$ -Mittel von (1), d. h.

$$F(\lambda, t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right)^n f(u) e^{iut} du$$

in jedem endlichen Intervall im Mittel der Ordnung 1 gegen einen Grenzwert konvergiert, so ist (2) fast überall  $(C, n+3)$ -summierbar. In der vorliegenden Note bemerkt der Verf., daß seine Beweise mit einer geringfügigen Änderung auf den Fall übertragen werden können, daß  $F(\lambda, t)$  in  $L^p(a, b)$  [ $p \geq 1$ ,  $(a, b)$  jedes endliche Intervall] schwach konvergiert. — Während der Verf. früher zeigte, daß die Bedingung

(3)  $\int_a^b F(\lambda, t) dt \rightarrow 0$  (für jedes endliche Intervall) bei  $n > 1$  für die eindeutige Bestimmtheit von  $f$  durch  $F$  ungenügend ist, beweist er jetzt, daß (3) zusammen mit

(4)  $\int_a^b |F(\lambda, t)|^p dt = O(1)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  die Eindeutigkeit gewährleistet. Doetsch.

Mandelbrojt, S. et S. Agmon: Une généralisation du théorème tauberien de Wiener. Acta Sci. math., Szeged 12B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 167—176 (1950).

Es sei  $K(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ ,  $g(u)$  die Fourier-Transformierte von  $K$  und  $\Omega(K)$  die Menge der Nullstellen von  $g(u)$ .  $B$  sei die Klasse der in  $(-\infty, \infty)$  meßbaren und beschränkten Funktionen. Der allgemeine Taubersche Satz von N. Wiener lautet: „Wenn

$$(1) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(y-x) h(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x) dx$$

für eine Funktion  $K_0 \in L^1$  mit leerem  $\Omega(K_0)$  und ein  $h \in B$  gilt, so gilt

$$(2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(y-x) h(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx$$

für jedes  $K \in L^1$ . Dieser Satz ist eine Folge des anderen: „Es sei  $K_0 \in L^1$ ,  $\Omega(K_0)$  leer und  $\{\xi_n\}$  eine in  $(-\infty, \infty)$  überall dichte Menge. Ist ein beliebiges  $K \in L^1$  gegeben, so kann man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein ganzes  $N$  und Konstante  $a_1, \dots, a_N$

finden, so daß

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x) - \sum_1^N a_v K_0(x - \xi_v) \right| dx < \varepsilon$$

gilt“. Verff. stellen sich das Problem, zu gegebenem  $K_0 \in L^1$  den Teilraum  $\pi(K_0)$  von  $L^1$  zu bestimmen, für dessen Elemente  $K$  eine Ungleichung der Form (3) für jedes  $\varepsilon$  gilt. Notwendig ist die Bedingung  $\Omega(K) \supset \Omega(K_0)$ . Daß sie hinreichend ist, konnten die Verff. nur unter Hinzunahme weiterer Bedingungen zeigen. Satz II macht eine zusätzliche Voraussetzung über  $\Omega(K)$ , Satz IV eine über das Wachstum von  $K$ . Satz II. Wenn  $\Omega(K) \supset \Omega(K_0)$  und der Durchschnitt  $I(K_0, K)$  der nichtinneren Punkte von  $\Omega(K_0)$  mit den nichtinneren Punkten von  $\Omega(K)$  abzählbar ist, so gehört  $K$  zu  $\pi(K_0)$ . Wenn für eine Funktion  $h \in B$  die Beziehung (1) gilt, so gilt auch (2). — Für Satz IV braucht man folgende Definition: Ist  $E$  eine lineare Menge und  $I$  ein Intervall, das in  $n$  gleiche Teilintervalle zerlegt ist, so bedeute  $\mu_n(E, I)$  die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle, die Punkte von  $E$  enthalten. Satz IV. Es sei  $\Omega(K) \supset \Omega(K_0)$ .  $I_N$  sei das Intervall  $|x| \leq N$ , und es werde  $\mu_n^{(N)} = \mu_n(I(K_0, K), I_N)$  gesetzt. Wenn für jedes  $N$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{(N)} \int_0^n dx \left( \int_x^\infty |K(u)| du + \int_{-\infty}^{-x} |K(u)| du \right) = 0$$

gilt, so treffen die Behauptungen von Satz II zu.

*Doetsch* (Freiburg i. Br.).

**Kakehashi, Tetujiro:** Stationary periodic distributions. J. Osaka Inst. Sci. Technology 1, 21—25 (1949).

Ist  $X(\xi)$  eine meßbare Funktion in  $0 \leq \xi \leq 1$ , so wird die periodische Verteilung  $F(x)$  von  $X$  definiert durch das Maß der Menge der  $\xi$  mit  $0 \leq X(\xi) \pmod{2\pi} \leq x$ . Die Faltung zweier Funktionen  $F_1, F_2$  sei definiert durch  $F_1 * F_2 = \int_0^{2\pi} F_1(x-y) dF_2(y)$ . Ist  $F * F = F$ , so heißt die Verteilung  $F$  stationär. Auf Grund des Faltungssatzes ergibt sich für die endliche Fourier-Transformierte

$$q(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} dF(x) \quad (\lambda = 0, \pm 1, \dots)$$

eines stationären  $F$  die Bedingung  $q^2(\lambda) = q(\lambda)$ , also  $q(\lambda) = 0$  oder 1. Es sei  $\varrho$  die kleinste positive ganze Zahl, für die  $q(\varrho) = 1$  ist. Dann ist  $q(\lambda) = 1$  für  $\lambda \equiv 0 \pmod{\varrho}$ ,  $q(\lambda) = 0$  für  $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\varrho}$ .  $F$  selbst ist eine Treppenfunktion, die an den Punkten, die das Intervall  $(0, 2\pi)$  in  $\varrho$  gleiche Teile teilen, die Sprunghöhe  $1/\varrho$  hat. — Weiterhin wird die unendlich oftmalige Faltung einer periodischen Verteilung betrachtet und die Grenzfunktion, falls vorhanden, bestimmt. *Doetsch*.

**Widder, D. V.:** An inversion of the Lambert transform. Math. Mag., Texas 23, 171—182 (1950).

In Analogie zu der Lambertschen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$  wird die Lambert-Transformation  $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{a(t)}{e^{xt}-1} dt$  betrachtet. Führt man die Funktionen  $F(x)$ ,  $ta(t)$  und  $(e^{xt}-1)^{-1}$  durch Ersatz von  $x$  durch  $e^{-x}$  und  $t$  durch  $e^t$  in Funktionen  $f(x)$ ,  $q(t)$  und  $G(x)$  über, so nimmt die Transformation die Gestalt einer „convolution transform“ (Transformation in Faltungsform) an:  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) q(t) dt$ , die aber nicht unter die vom Verf. in früheren Arbeiten betrachteten Typen fällt,



weil die dortige als ganz vorausgesetzte Hilfsfunktion jetzt meromorph ist. Die zweiseitige Laplace-Transformation  $L_{II}$  (zunächst heuristisch angewandt) führt die Faltung  $G * \varphi$  in ein algebraisches Produkt über, wodurch sich wegen  $L_{II}\{G\} = \zeta(s)\Gamma(s)$  ergibt:  $L_{II}\{\varphi\} = \frac{1}{\Gamma(s)\zeta(s)} L_{II}\{f\}$ . Auf Grund der Entwicklung  $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-s \log n}$  [ $\mu(n)$  = Möbiussche Funktion] gehört zu der Bildfunktion  $\frac{1}{\zeta(s)} L_{II}\{f\}$  die Originalfunktion  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) f(x - \log n)$ . Ferner entspricht der Multiplikation mit  $1/\Gamma(s)$  im Originalbereich die Umkehrung der einseitigen Laplace-Transformation  $L_I$ , nachdem in dieser dieselbe exponentielle Substitution wie oben vorgenommen ist. Macht man letztere wieder rückgängig, so erhält man als Äquivalent zu der Gleichung für  $L_{II}\{\varphi\}$  im Originalbereich die Gleichung  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F(nx) = L_I\{a\}$ , auf die man nur eine der bekannten Umkehrformeln der  $L_I$ -Transformation anzuwenden braucht, um  $a(t)$  zu erhalten. In Ausführung dieses Programms ersetzt der Verf. den Kern  $(e^{xt} - 1)^{-1}$ , der für  $t = 0$  unendlich wird, durch  $t(e^{xt} - 1)^{-1}$  und zeigt zunächst, daß das Integral  $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{t a(t)}{e^{xt} - 1} dt$  denselben Konvergenzbereich wie

das  $L_I$ -Integral  $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t a(t) dt$  besitzt, wenn letzteres für  $x = 0$

divergiert. Wird weiterhin  $\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty$  und  $a(t) t^{1-\delta} \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +0$  ( $\delta > 0$ ) vorausgesetzt, so läßt sich die Lambert-Transformierte  $F$  durch die Laplace-Transformierte  $f$ :  $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kx)$ , und umgekehrt:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F(nx)$  ausdrücken.  $F$  läßt sich auch selbst als Laplace-Transformierte  $F(x) = L_I\{t b(t)\}$  mit  $b(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} a\left(\frac{t}{k}\right)$ , und umgekehrt  $f$  als Lambert-Transformierte:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t c(t)}{e^{xt} - 1} dt \quad \text{mit} \quad c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} a\left(\frac{t}{n}\right)$$

darstellen. Aus der ersteren Relation ergibt sich vermöge der Post-Widderschen Umkehrformel der Laplace-Transformation folgende Umkehrformel der Lambert-Transformation:

$$t a(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^k F\left(\frac{n k}{t}\right),$$

worin auch  $\lim$  und Summe vertauscht werden können. Doetsch (Freiburg i. Br.)

Guinand, A. P.: A note on repeated general transformations. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 354—355 (1950).

$x^{-1} k_1(x)$  gehöre zu  $L^2(0, \infty)$ , und es sei  $\int_0^{\infty} k_1(ax) k_1(bx) \frac{dx}{x^2} = \min(a, b)$

für positive  $a$  und  $b$ .  $f(x, y)$  sei eine homogene Funktion von  $x$  und  $y$  vom Grade  $-1$ , und  $x^{-\frac{1}{2}} f(1, x)$  gehöre zu  $L(0, \infty)$ . Dann ist die Transformierte

$$g(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u, v) k_1(xu) k_1(yv) \frac{du dv}{uv}$$

gleich  $f(y, x)$ .

Doetsch (Freiburg i. Br.).

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Halmos, Paul R.: Measurable transformations. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1015—1034 (1949).

Le but de cet article est de donner une vue d'ensemble des résultats obtenus de 1931 à 1948 dans la théorie des transformations mesurables et conservant la mesure. ( $X; \mu$ ) désigne un espace mesuré tel que  $\mu(X) = 1$ ,  $T$  une transformation biunivoque de  $X$  sur lui-même telle que pour tout sous-ensemble mesurable  $E$  de  $X$ ,  $TE$  et  $T^{-1}E$  soient mesurables et  $\mu(E) = \mu(TE) = \mu(T^{-1}E)$ . Le théorème de récurrence de Poincaré et le théorème ergodique de Birkhoff sont énoncés et différents essais de généralisation mentionnés, en particulier lorsque la transformation  $T$  n'est plus assujettie à conserver la mesure. Les notions d'indécomposabilité et de décomposition sont présentées. Le problème de la décomposition d'une transformation conservant la mesure en composants indécomposables est explicité et quelques théorèmes s'y rapportant signalés. Suit un paragraphe concernant la rareté topologique parmi les transformations conservant la mesure, des transformations indécomposables. La condition d'incomposabilité est équivalente à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(E \cap T^i F) = \mu(E) \mu(F)$$

pour toute paire d'ensembles mesurables  $E$  et  $F$ .  $T$  mélange fortement si dans les mêmes conditions  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n F) = \mu(E) \mu(F)$ , faiblement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(E \cap T^i F) - \mu(E) \mu(F)| = 0.$$

L'aspect intuitif de ces notions est dégagé, leur rareté ou fréquence topologiques indiquées. Une transformation  $T$  conservant la mesure induit un automorphisme (scématique) de l'espace mesuré; inversement dans les espaces mesurés habituels tout automorphisme (somatique) peut être induit par une transformation ponctuelle  $T$ . Une transformation  $T$  induit dans l'espace de Hilbert-Hermite  $L_2$  sur  $(X; \mu)$  un opérateur unitaire  $U$  défini par  $(Uf)(x) = f(T(x))$ .  $T$  est indécomposable si et seulement si 1 est une valeur propre simple de  $U$ .  $T$  est un mélange faible si et seulement si 1 est une valeur propre de  $U$  et si en outre  $U$  n'admet pas d'autres valeurs propres. Si deux transformations  $T'$  et  $T''$  sont telles que les ensembles de fonctions propres des opérateurs unitaires correspondants  $U'$  et  $U''$  contiennent chacun un système orthonormal complet, l'isomorphisme de  $T'$  et  $T''$  est logiquement équivalent à l'équivalence spectrale de  $U'$  et  $U''$  (c'est-à-dire à l'existence d'un opérateur unitaire  $U$  tel que  $UU'U^* = U''$ ). Un exemple simple est donné montrant que les notions d'isomorphisme et d'équivalence spectrale ne sont pas logiquement équivalentes dans le cas général. Dans les considérations précédentes intervient une mesure invariante vis-à-vis d'une transformation biunivoque  $T$  donc invariante vis-à-vis du groupe des puissances  $T^n$  de  $T$ . L'auteur discute la question de l'existence d'une mesure invariante relativement à une transformation biunivoque fixée. Une famille de transformations  $(T_t)$  à un paramètre,  $-\infty < t < +\infty$  est appelée „flux“ si  $T_{t+s} = T_t T_s$ . Les résultats obtenus pour la groupe  $(T^n)$  s'étendent aisément au groupe continu  $(T_t)$ .  $Z$  désignant la droite numérique,  $f$  une fonction mesurable positive,  $X$  l'ensemble des ordonnées de  $f$  dans l'espace produit  $X \times Z$ , le flux de  $T$  sous la fonction  $f$  est défini ainsi: Le point  $(x, t)$  partant de la position  $(x, 0)$  se déplace vers le haut avec une vitesse  $= 1$  jusqu'au moment où il atteint le „plafond“  $f(x)$ ; il gagne alors instantanément la position  $(Tx, 0)$ , grimpe l'ordonnée correspondante avec la vitesse unité et ainsi de suite. Tout flux mesurable indécomposable est isomorphe au flux construit sous une fonction. Dans le dernier paragraphe sont mentionnés et précisés quelques problèmes non résolus; citons le problème de l'existence d'une mesure invariante par un groupe de transformations, l'étude des transformations conservant la mesure dans des espaces de mesure infinie, la caractérisation par un ensemble complet d'invariants de l'isomorphisme de deux transformations  $T$  conservant la mesure. L'article suivi d'une bibliographie de cent trente-six publications constitue un excellent guide pour un mathématicien ou un étudiant avancé désirant s'orienter sur le sujet.

Chr. Paruc (le Cap).

Schaerf, Henry M.: On unique invariant measures. Bull. Amer. math. Soc. 54, 540—545 (1948).

Es seien  $G$  eine abstrakte Gruppe und  $S$  ein  $\sigma$ -Körper  $m$ -meßbarer Teilmengen von  $G$ . Das Maß  $m$  sei invariant, d. h. es gelte  $m(gA) = m(A)$ ,  $A \in S$ ,  $g \in G$ . Unterscheidet sich  $m$  von jedem anderen invarianten Maß nur durch eine multiplikative Konstante, so heißt  $m$  eindeutig invariant. Eine  $m$ -meßbare Menge  $A \in S$  heißt fast kongruent zu  $A' \in S$  bezüglich einer endlichen bzw. abzählbar unendlichen Zerlegung, wenn eine endliche bzw. abzählbar unendliche Zerlegung:  $\bigcup_k A_k$ ,  $A_i \cap A_j = 0$  für  $i \neq j$ ,  $A_k \subset A$  und eine entsprechende Folge von Elementen



$g_1, g_2, \dots$  aus  $G$  existieren, so daß gilt: 1.  $m\left(A - \bigcup_k A_k\right) = 0$ , 2.  $g_k^{-1} A_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) paarweise fremd und Teilmengen von  $A'$  und  $m\left(A' - \bigcup_k g_k^{-1} A_k\right) = 0$ . Ist ein Maß eindeutig invariant, so ist jede  $m$ -meßbare Menge  $A$  mit  $m(A) \leq m(B)$  bzw.  $m(A) = m(B)$  fast kongruent bezüglich einer Zerlegung zu einer Teilmenge von  $B$  bzw. zu  $B$ . Ein invariantes Maß  $m$  ist dann und nur dann eindeutig invariant, wenn  $m(Xg)$ , als Funktion von  $X \in S$  betrachtet, für jedes  $g \in G$  absolut stetig ist. Erfüllt ein invariantes Maß  $m$  die Bedingung  $M_2$  bzw.  $M^*$ , d. h. wird jede Menge  $A \times G$ ,  $A \in S$  durch die Transformation  $(x, y) \rightarrow (yx, y)$  bzw.  $(x, y) \rightarrow (xy, y)$  auf eine  $m \times m$ -meßbare Teilmenge von  $G \times G$  abgebildet, so ist  $m$  eindeutig invariant (s. auch A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris 1938).

D. A. Kappos (Erlangen).

Vilenkin, N.: On a class of complete orthonormal systems. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 11, 363—398 u. engl. Zusammenfassg. 399—400 (1947).

Verf. knüpft an Arbeiten von Freudenthal (dies. Zbl. 18, 392) und Pontrjagin über stetige Gruppen an und beweist eine Reihe von Sätzen, die als Analoga zu solchen über trigonometrische Reihen erscheinen. Ist  $G$  eine kompakte abelsche Gruppe, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so bilden die stetigen multiplikativen Charaktere  $\chi(x)$  auf  $G$  eine abelsche Gruppe  $X$  und zugleich ein vollständiges Orthonormalsystem für die komplexwertigen nach Haar meßbaren und integrierbaren Funktionen  $f(x)$  auf  $G$ . (In § 1 ist versehentlich die Verknüpfung in  $X$  als Addition geschrieben.) Ist speziell  $G$  die Gruppe sämtlicher Drehungen eines Kreises in sich (um Winkel  $\alpha$ ), so ist  $X$  die Menge der  $\chi(\alpha) = e^{in\alpha}$  ( $n$  ganz), und die Reihen nach  $X$  sind gewöhnliche Fourierreihen. Hier wird  $G$  jedoch als null-dimensional angenommen; dann ist  $X$  abzählbar und enthält nur Elemente von endlicher Ordnung.  $X$  wird durch eine Folge endlicher Gruppen  $X_0 \subset X_1 \subset \dots$  ausgeschöpft, wo die Ordnung von  $X_n \setminus X_{n-1}$  eine Primzahl  $p_n$  ist;  $X_n$  hat die Ordnung  $m_n = p_1 \cdots p_n$ . Mittels einer solchen Folge  $\{X_n\}$  wird  $X$  durchnumeriert. — Ist  $G_n$  die Menge der  $x \in G$  mit  $\chi(x) = 1$  für  $\chi \in X_n$ , so bilden die  $G_n$  ein System von Umgebungen des Nullelementes von  $G$  ( $G$  additiv geschrieben). — Neben  $X$  wird auch das aus den  $\operatorname{Re} \chi$  und  $\operatorname{Im} \chi$  ( $\chi \in X$ ) gebildete Orthogonalsystem  $\tilde{X}$  benutzt. — Nachdem auch  $G$  in bestimmter Weise geordnet ist, werden Funktionen (auf  $G$ ) von beschränkter Schwankung erklärt. — Es sei  $\tilde{f}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \int_{y+G_k} f(x) dx$ , wenn

vorhanden. Ist  $f(x)$  stetig bei  $x = y$ , so ist  $f(y) = \tilde{f}(y)$ . Ist  $f(x)$  integrierbar,  $y \in G$ , ist  $s_n(x)$  die  $n$ -te Teilsumme der Fourierreihe von  $f(x)$ , und existiert  $\tilde{f}(y)$ , so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{m_k}(y) = \tilde{f}(y)$ , aber nicht notwendig  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(y) = \tilde{f}(y)$ . — Weiter gelten

Analoga zu Sätzen von Dirichlet über Funktionen von beschränkter Variation, von Dini-Lipschitz über gleichmäßige Konvergenz, von Fejér über Summabilität, von Bernstein über absolute Konvergenz von Fourierreihen. Besonders einfache Aussagen sind möglich, wenn unter den  $p_n$  nur endlich viele verschiedene sind.

Wecken (Haltigen, Kr. Lörrach).

Herglotz, Gustav: Eine Formel der formalen Operatorenrechnung. *Math. Ann.*, Berlin 122, 14—15 (1950).

Gilt für die Elemente  $X, Y$  eines nichtkommutativen Ringes, daß  $YX - XY = Z$  vertauschbar ist mit  $X$  und  $Y$ , so gilt die folgende formale Potenzreihenidentität:

$$e^{tXY} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} X^v Y^v \left( \frac{e^{tZ} - 1}{Z} \right)^v, \text{ die für die Vertauschungsregel } YX - XY = E$$

der Quantenmechanik übergeht in  $e^{tXY} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (e^t - 1)^v X^v Y^v$ , also  $e^{tXY} = E$  für  $t = 2n\pi i$ .

G. Köthe (Mainz).

**Julia, Gaston:** Quelques caractères des opérateurs hermitiens permutables ou antipermutables. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 185—189 (1949).

Es handelt sich um beschränkte Hermitesche Operatoren;  $h p \cdot k$  bedeutet  $h k = k h$ ,  $h a \cdot p \cdot k$  bedeutet  $h k = -k h$ . Falls  $h \geq 0$  ist, lassen sich die permutablen und antipermutablen  $k$  leicht charakterisieren, im indefiniten Falle benutzt man die bekannte Zerlegung von  $h$  in einen definit positiven und definit negativen Bestandteil  $h = H' - H''$ ,  $H' H'' = 0$  und findet für  $k p \cdot h$ :  $k p \cdot H'$  und  $k p \cdot H''$ , für  $k a \cdot p \cdot h$ :  $H' k = k H''$ ,  $H'' k = k H'$ . Ferner enthält die Arbeit u. a. noch Untersuchungen über die  $k$ , welche zu einer Potenz von  $h$  vertauschbar sind. Für diese gilt, falls  $h$  definit,  $k p \cdot h$ , falls  $h$  indefinit, entweder  $k h^2 = h^2 k$  oder  $k h = h k$ . Immer, falls  $k h^2 = h^2 k$  ist, läßt sich  $k$  in 3 Summanden zerlegen, die zu  $h$  permutabel, antipermutabel bzw. orthogonal sind. Benutzt wird dabei der Begriff der  $n$ -ten Wurzel aus einem positiv definiten Hermiteschen Operator, die selbst ebenfalls ein positiv definiten Hermitescher Operator ist. *Schmeidler.*

**Page, M. G.:** Idempotente Operatoren und ihre Ausrichtung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 895—897 (1950) [Russisch].

Es sei  $\{J_n\}$  eine Folge von beschränkten idempotenten, paarweise orthogonalen Operatoren im Hilbertschen Raume, d. h. es sei  $J_m^2 = J_m$ ,  $J_m J_n = 0$  ( $m \neq n$ ). Ferner sei  $\Sigma J_m = I$  (der Einheitsoperator). Es wird folgendes bewiesen: Damit eine solche „schiefe“ Zerlegung der Einheit  $\{J_m\}$  sich „ausrichten“ läßt, d. h. damit es einen beschränkten Operator  $S$  mit beschränkter Inverser  $S^{-1}$  derart gibt, daß die  $S^{-1} J_n S$  orthogonale Projektoren sind, ist notwendig und hinreichend, daß

$$C^{-1} \|x\|^2 \leq \Sigma \|J_m x\|^2 \leq C \|x\|^2$$

mit einer positiven Konstanten  $C$  und für alle Elemente  $x$  des Raumes gilt. — Anwendung auf den Fall vollständiger biorthogonaler Systeme in einem (separablen) Hilbertschen Raume. *Béla Sz.-Nagy (Szeged).*

**Dixmier, J.:** Les opérateurs permutables à l'opérateur intégral. Portugaliae Math. 8, 73—84 (1949).

L'A. envisage, dans l'espace fonctionnel  $L^1(0, 1)$ , les opérateurs  $J$  et  $A_t$  ( $t > 0$ ) définis par  $Jf = \int_0^x f(\xi) d\xi$ ,

$$A_t f = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < t, \\ f(x-t) & \text{si } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soient  $N$  et  $M$  les plus petites algèbres fortement fermées d'opérateurs contenant respectivement  $J$  et les  $A_t$ . Soient  $N'$  et  $M'$  les ensembles des opérateurs permutant aux opérateurs de  $N$  et  $M$ , respectivement. Les résultats principaux du travail sont les suivants: On a:  $M = M' = N = N'$ ; tout opérateur  $T \in M$  est limite forte d'une suite  $A^{(n)}$  de combinaisons linéaires des  $A_t$  et d'une suite  $B^{(n)}$  de polynômes de  $J$ , telles que

$$\|A^{(n)}\| \leq \|T\|, \|A^{(n)}\| \rightarrow \|T\|, \|B^{(n)}\| \leq \|T\|, \|B^{(n)}\| \rightarrow \|T\|.$$

(On peut donc dire que tout opérateur permutant à  $J$  est une fonction de  $J$ .) Un tel  $T$  admet aussi une représentation intégrale

$$T = \int_0^1 A_t dg(t)$$

avec une fonction à variation bornée  $g(t)$ , dans le sens que, pour tout  $f \in L^1$ ,  $Tf$  est l'intégrale forte de la fonction continue de  $t$ ,  $A_t f$ , à valeurs dans  $L^1$ . En particulier,

on a  $J = \int_0^1 A_t dt$ . — Les seuls sous-espaces fermés dans  $L^1$  qui se transforment en eux-mêmes par  $J$  ou, ce qui revient au même, par  $M = M'$ , sont les  $V_t =$  [ensemble des  $f(x)$  s'annulant presque partout dans  $0 \leq x \leq t$ ]. Il y a des opérateurs qui



transforment tous les  $V_i$  en eux-mêmes et qui n'appartiennent pas à  $M = M'$ , comme par exemple l'opérateur de la multiplication par  $x$ . L'algèbre  $M$  ne contient aucun opérateur idempotent sauf 0 et 1. — Il est bien instructif de comparer ces résultats avec les faits connus sur une algèbre fermée  $M$  d'opérateurs dans un espace de Hilbert séparable, engendrée par un opérateur auto-adjoint  $A$ . Là,  $M$  contient tous les projecteurs spectraux de  $A$  et est même engendré par ceux-ci, et un opérateur appartient à  $M'$  si et seulement s'il conserve toutes les variétés spectrales de  $A$  (ou de  $M$ ). — Notons le lemme suivant d'un propre intérêt: Pour un  $f \in L^1(0, 1)$ ,  $N(f) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \|f - A_h f\|$  est égale à la variation totale essentielle de  $f(x)$ , c'est-à-

dire à la variation totale de la fonction  $f(x)$ , s'annulant pour  $x = 0$ , continue de gauche pour  $0 < x \leq 1$ , et coïncidant presque partout avec  $f(x)$ , à condition qu'une telle fonction existe; autrement  $N(f) = \infty$ . Béla Sz.-Nagy (Szeged).

**Dixmier, J.:** Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 387—408 (1950).

L'A. considère l'ensemble  $B$  des opérateurs bornés partout définis dans un espace de Hilbert  $H$ , muni de l'une des trois topologies classiques: uniforme, ultra-forte („strongest“ dans la terminologie de von Neumann) et forte, et détermine les formes linéaires continues sur  $B$  pour chacune de ces topologies. Lorsque  $B$  est muni de la topologie forte, son dual  $E$  est formé des applications  $A \rightarrow \sum_{i=1}^n (A t_i, u_i)$  où  $t_i$  et  $u_i$  sont quelconques dans  $H$ . Soit  $J$  l'ensemble des opérateurs complètement continus dans  $H$ ; lorsqu'on munit  $J$  de la topologie uniforme,  $J$  est un sous-espace fermé de  $B$ , donc un espace de Banach; l'A. détermine le dual  $J'$  de  $J$ , et montre que le dual  $J''$  de  $J'$  peut être canoniquement identifié à  $B$ . Si  $B'$  est le dual de  $B$  muni de la topologie uniforme,  $B'$  est somme directe topologique de  $J'$  et de l'espace  $J^\perp$  des formes linéaires continues dans  $B$  et s'annulant dans  $J$ . Enfin,  $J'$  est le dual de  $B$  muni de la topologie ultra-forte. Ces résultats permettent de simplifier et de généraliser plusieurs résultats classiques sur les anneaux d'opérateurs (au sens de von Neumann). Dans une Note à la fin du mémoire, l'A. montre que  $E$ , considéré comme sous-espace de l'espace de Banach  $B'$ , est de première catégorie, et est presque complet au sens de Mackey [Trans. Amer. math. Soc. 57, 155—207 (1945)] résolvant ainsi un problème posé par ce dernier. J. Dieudonné (Nancy).

**Dixmier, J.:** Les anneaux d'opérateurs de classe finie. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 209—261 (1949).

Unter Bezugnahme auf F. J. Murray und J. von Neumann [Ann. Math. 37, 116—229 (1936); dies. Zbl. 14, 161 und Trans. Amer. Math. Soc. 41, 208—248 (1937); dies. Zbl. 17, 360] werden die Eigenschaften der Operatorenringe endlicher Klasse studiert. Die Gesamtheit  $B$  aller beschränkten Operatoren des Hilbertschen Raumes bildet eine Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen. In ihr lassen sich verschiedene Topologien bilden je nach dem gewählten Begriff der „Umgebung“ des Nulloperators, die als „uniforme“, „starke“ und „schwache“ Topologie bezeichnet werden. Jede selbstadjungierte Unter-algebra  $M$  von  $B$ , die stark abgeschlossen ist, heißt Ring von Operatoren; immer soll der Einheitsoperator 1 darin enthalten sein. Ein Operatorenring heißt Faktor, wenn sein Zentrum aus allen skalaren Vielfachen der 1 besteht. Ein Ring  $M$  heißt von endlicher Klasse, wenn aus  $A \in M$ ,  $AA^* = 1$  folgt  $A^*A = 1$ . Für Faktoren endlicher Klasse haben Murray und Neumann die Existenz einer linearen Funktion als  $T(A)$  auf  $M$  gezeigt, welches die charakteristischen Eigenschaften hat, daß  $T(1) = 1$ ,  $T(A^*) = T(A)$ ,  $T(AB) = T(BA)$ ,  $T(A) \geq 0$  ist, letzteres wenn  $A$  selbstadjungiert positiv ist. Beschränkt man sich auf selbstadjungierte Operatoren von  $M$ , so gilt für das zugehörige Funktional  $T'(A)$ :  $T'(1) = 1$ ,  $T'(UAU^{-1}) = T'(A)$ , wenn  $U \in M$

unitär ist,  $T'(A) \geq 0$  wenn  $A \geq 0$ . Diese Eigenschaften der „Spur von  $A$ “ gelten nun nicht bloß für Faktoren, sondern allgemein für Ringe endlicher Klasse  $M$ , allerdings mit der Modifikation, daß die Spur von  $A \in M$  jetzt kein Skalar, sondern ein Operator aus dem Zentrum von  $M$  ist; sie ist eindeutig bestimmt und wird mit  $A\sharp$  bezeichnet. Genauer gilt: 1. Wenn  $A$  zum Zentrum gehört, ist  $A\sharp = A$ . 2.  $(\lambda A)\sharp = \lambda A\sharp$ . 3.  $(A + A')\sharp = A\sharp + A'\sharp$ . 4.  $(AB)\sharp = (BA)\sharp$ ; wenn  $A$  zum Zentrum gehört, ist  $(AB)\sharp = AB\sharp$ . 5. Wenn  $A = A^*$  und  $\geq 0$ , so ist  $A\sharp = (A\sharp)^* \geq 0$ ; aus  $A\sharp = 0$  folgt dann  $A = 0$ . 6.  $(A^*)\sharp = (A\sharp)^*$ . — Die Beweise für die Existenz und Eindeutigkeit sowie für diese Eigenschaften der Spur erfolgen auf Grund von abstrakten Hypothesen, deren Gültigkeit im Falle der Operatorenringe zum Teil trivial, in anderen Fällen sehr schwierig zu verifizieren ist. Letzteres gilt von der Tatsache, daß bei vorgegebenem  $A \in M$  die konvexe, uniform abgeschlossene Menge, die durch  $UAU^{-1}$  ( $U$  unitär in  $M$ ) erzeugt wird, mit dem Zentrum von  $M$  einen nicht leeren Durchschnitt hat; diese Eigenschaft gilt sogar für alle Operatorenringe, welche die 1 enthalten. Daß dagegen dieser Durchschnitt genau ein einziges Element bestimmt, eben  $A\sharp$ , das gilt nur für Ringe endlicher Klasse und ist ebenfalls sehr schwer zu beweisen. Genauer ergibt sich weiterhin, daß die Menge aller Operatoren von der Spur Null der vektoriell abgeschlossene Unterraum  $M^*$  von  $M$  ist, der aus allen Operatoren von der Form  $AB - BA$ , wo  $A$  und  $B$  zu  $M$  gehören, besteht. Es gilt  $M = M^* + \text{Zentrum}$ . Die Zuordnung  $A \rightarrow A\sharp$  ist stetig in der uniformen, für einen Faktor  $M$  auch in der schwachen Topologie, dagegen für einen allgemeinen Operatorenring von endlicher Klasse weder in der schwachen, noch in der starken Topologie stetig: mit der Einschränkung  $\|A\| \leq 1$  ist die Zuordnung in der starken Topologie stetig. — Die Beweise und viele weitere Einzelheiten müssen aus der Arbeit selbst entnommen werden. *Schmeidler (Berlin).*

**Hille, Einar:** Lie theory of semi-groups of linear transformations. Bull. Amer. math. Soc. 56, 89—114 (1950).

Es sei  $E_n^+$  bzw.  $E_n^+$  der Teil des  $n$ -dimensionalen Raumes, dessen Punkte  $a = (x_1, \dots, x_n)$  sämtlich Koordinaten  $x_j \geq 0$  bzw.  $> 0$  haben. Jedem  $a$  sei ein linearer beschränkter Operator  $T(a)$  zugeordnet, der einen gegebenen Banachraum  $\mathfrak{X}$  in sich abbildet. Die Menge  $\mathfrak{S}$  dieser  $T(a)$  erfülle die folgenden Voraussetzungen:  $T(0) = 1$ ,  $\|T(a)\| \leq 1$  für alle  $a \in E_n^+$ ,  $T(a)$  eine stark meßbare Funktion von  $a$ ; das Produkt  $T(c) = T(a)T(b)$  sei stets in  $\mathfrak{S}$  erklärt, die Funktion  $c = F(a, b)$  wird in beiden Variablen gleichzeitig als stetig vorausgesetzt, ferner gelte  $F(a, 0) = F(0, a) = a$ ,  $F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c)$ . Aus den letzten Eigenschaften folgt, daß  $\mathfrak{S}$  eine Halbgruppe ist. Sie wird offenbar im allgemeinen nichtkommutativ sein. Setzt man weiter voraus, daß zu jeder beschränkten Menge  $K$ , deren Abschließung in  $E_n^+$  liegt, ein  $\delta(K)$  existiert, so daß für  $c \in K$ ,  $|h_1| < \delta$ , die Gleichung  $F(h, b) = c$  eine eindeutige Lösung  $b = \varphi(c, h)$  in  $E_n^+$  hat, die stetig von  $(c, h)$  abhängt, so daß für feste Werte von  $c$  stets meßbare Mengen sich entsprechen, so läßt sich daraus die starke Stetigkeit von  $T(a)$  in  $E_n^+$ , jedoch nicht auf dem Rande, vor allem nicht in 0, ableiten. Um über die einparametrischen Halbgruppen in  $\mathfrak{S}$  Aussagen machen zu können, muß man die Stetigkeit von  $T(a)$  in ganz  $E_n^+$  voraussetzen, ferner eine Lipschitzbedingung für  $F(a, b)$  und eine Abschätzung von  $F(a, b)$ :  $F(a, b)$  muß sich schreiben lassen als  $F(a, b) = a + b + G(a, b)$ , wobei

$$|G(a, b)| \leq \min(|a|, |b|) \omega(|a + b|)$$

ist,  $\omega(\xi)$  eine für  $\xi > 0$  positive monoton wachsende Funktion mit  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \omega(\xi) = 0$ .

Ist dann irgendein  $a \in E_n^+$  gegeben, so konvergiert die Folge  $[T(2^{-j}a)]^{2^j}$  stark gegen einen Grenzwert  $S(a) = T(f(a))$ . Die Funktion  $f(a)$  ist erklärt als  $\lim_{j \rightarrow \infty} (2^{-j}a; 2^j)$ , der Ausdruck  $(b; m)$  ist rekursiv erklärt durch  $(b; 1) = b$ ,  $(b; m) = F(b, (b; m-1))$ .



Die  $S(\varrho a)$  bilden für  $\varrho > 0$  eine einparametrische Halbgruppe  $\mathfrak{S}_a$  in  $\mathfrak{S}$  und ist  $\int_0^1 \xi^{-1} \omega(\xi) d\xi < \infty$ , so läßt sich jede einparametrische Teilhalbgruppe von  $\mathfrak{S}$  so gewinnen. Die Funktionen  $f(\varrho a)$  lassen sich bei geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über  $F(a, b)$  auch als Lösungen eines Differentialgleichungssystems 1. Ordnung gewinnen. In Halbgruppen kann es Lösungen von  $p = F(p, p)$  geben, der zugehörige Operator  $T(p)$  ist dann eine Projektion. Mit jeder einparametrischen Halbgruppe  $\mathfrak{S}_a$  ist eine infinitesimale Erzeugende  $A(a)$  gegeben durch

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} [T(f(\delta a)) - I] x = A(a) x.$$

Dieser Limes existiert für alle  $x$  eines in  $\mathfrak{X}$  dichten Definitionsbereiches  $\mathfrak{D}(a)$ . Es gilt stets  $A(\alpha a) = \alpha A(a)$  für  $\alpha > 0$ . Unter Voraussetzungen über die Existenz von Ableitungen höherer Ordnung von  $F(a, b)$  läßt sich auf sehr kunstvolle Weise zeigen, daß es einen in  $\mathfrak{X}$  dichten Bereich  $\mathfrak{D}$  gibt, in dem für alle

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_i \geq 0$$

gilt:  $A(a) x = \sum \alpha_i A_i x$ ,  $A_i = A(e_i)$ ; die  $A_i$  sind in  $\mathfrak{D}$  linear unabhängig. Aus der Existenz dieses linearen Halbmoduls der infinitesimalen Erzeugenden der Halbgruppe  $\mathfrak{S}$  ergeben sich dann rasch die Analoga der drei Hauptsätze der Lieschen Theorie. Nicht alle Beweise sind ausgeführt. G. Köthe (Mainz).

**Zaanan, A. C.: Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations.** Acta math., København 83, 197—248 (1950).

Der in der Arbeit benutzte Begriff des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$  ist allgemeiner als üblich; wie schon Rellich [Math. Ann. 110, 342—356 (1934); dies. Zbl. 10, 25] betont hat, bleiben wichtige Sätze der Theorie erhalten, wenn man die Separabilität und bei Beschränkung auf vollstetige normale Transformationen auch die Vollständigkeit von  $\mathfrak{H}$  preisgibt. Bei beschränkten linearen Transformationen  $K$  muß dann die Existenz und Beschränktheit von  $\mathfrak{H}^*$  angenommen werden. Darüber hinaus verallgemeinert Verf. den Begriff der normalen Transformation ( $KK^* = K^*K$ ) durch Annahme einer beschränkten, positiven, selbstadjungierten Transformation  $H$ , von der angenommen wird, daß jedes Element  $f$  von  $\mathfrak{H}$  in der Form  $g + h$  darstellbar ist, wo  $Hh = 0$  und  $g$  die Projektion von  $f$  auf die Mannigfaltigkeit aller zu allen Nulllösungen von  $H$  orthogonalen Elemente ist. Er nennt die beschränkten Transformationen  $K$  und  $\tilde{K}$   $H$ -adjungiert, wenn

$$(HKf, g) = (Hf, \tilde{K}g)$$

für beliebige  $f, g$  in  $\mathfrak{H}$  gilt. Wenn außerdem  $HK\tilde{K} = H\tilde{K}K$  gilt, so heißt  $K$  normalisierbar. Verf. beweist dann insbesondere folgende Sätze: In einem nicht notwendig separablen und nicht notwendig vollständigen Hilbertschen Raum sei  $K$  normalisierbar und  $T = EK$  vollstetig ( $E$  ist die oben definierte Projektion), ferner  $P = HK \neq 0$ . Dann gibt es mindestens einen Eigenwert  $\lambda_1 \neq 0$  für  $T$  und  $\lambda_1$  für  $\tilde{T} = E\tilde{K}$  mit derselben Eigenlösung  $\varphi_1$ , ferner ein endliches oder abzählbares  $H$ -orthonormales System  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, (H\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ , so daß

$$T\varphi_i = \lambda_i \varphi_i, \quad \tilde{T}\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (\lambda_i \neq 0)$$

und für  $\alpha_i = (Hf, \varphi_i)$  bei willkürlichem  $f$  in  $\mathfrak{H}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( H \left( Kf - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \varphi_i \right), \quad Kf - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \varphi_i \right)^{\frac{1}{2}} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( H \left( \tilde{K}f - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \alpha_i \varphi_i \right), \quad \tilde{K}f - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \alpha_i \varphi_i \right)^{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

gilt. Folgt ferner aus  $Hf = 0$  stets  $Kf = 0$ , so gelten die entsprechenden Aussagen auch für  $K$  selbst. Der Satz von Rellich folgt hieraus für  $H = J$ , die

von ihm gemachte Voraussetzung der Vollstetigkeit von  $K^x$  ist unnötig. Betrachtet man an Stelle von  $\mathfrak{R}$  das System  $z$  der Restklassen  $[f]$  aller Elemente  $f$  von  $\mathfrak{R}$  modulo  $Hg = 0$ , so wird bei Definition des skalaren Produktes  $([f_1], [f_2]) = (Hf_1, f_2)$  und wenn  $[K][f] = [Kf]$  gesetzt wird,  $[K]$  eine vollstetige normale Transformation in dem durch ideale Elemente zu einem vollständigen Raum  $\bar{Z}$  ergänzten Raume  $Z$ , falls  $K$  in  $\mathfrak{R}$  normalisierbar und  $T = EK$  vollstetig,  $P = HK \neq 0$  ist. Läßt man die Normalisierbarkeit fort, so ergeben sich Aussagen, die sich zu den angegebenen verhalten wie im klassischen Falle die Sätze von E. Schmidt über unsymmetrische zu denen von Hilbert über symmetrische Kerne. Ein Sonderfall normalisierbarer Transformationen ist  $K = AH$ , wo mindestens eine der Transformationen  $H$  und  $A$  vollstetig und  $H A H A^* H = H A^* H A H$  ist. Dann gilt die Konvergenz von  $\sum \lambda_i \alpha_i \varphi_i$  und  $\sum \lambda_i \alpha_i \varphi_i$  im gewöhnlichen Sinne bezüglich der Norm  $\|f\|$ , aber die Summen unterscheiden sich von  $Kf$  und  $\bar{K}f$  durch additive Nulllösungen von  $H$ . Der Schluß der Arbeit enthält Anwendungen auf ein System von Integralgleichungen. — Ref. benutzt die Gelegenheit um festzustellen, daß sein etwa gleichzeitig aufgestellter Begriff der Normalisierbarkeit (dies. Zbl. 33, 284) hiermit weitgehend verallgemeinert ist; die dortige Bemerkung, daß damit alle Fälle umfaßt seien, in denen eine Spektraldarstellung des Operators möglich ist, ist irrig. Hervorgehoben sei ferner, daß auch dieser allgemeine Begriff der Normalisierbarkeit rein begrifflich in einem geeignet definierten Grundbereich auf den des normalen Operators hinausläuft.

W. Schmeidler (Berlin).

Michlin, S. G.: Über die Konvergenz der Methode von Galerkin. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 197—199 (1948) [Russisch].

Die Methode von Galerkin zur Lösung der Gleichung  $Au - f = 0$  ( $A$  dicht definierter linearer Operator im separablen Hilbertschen Raum  $H$ ) läuft darauf hinaus, für ein in  $H$  vollständiges System  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  die Abschnittsgleichungen der Kernmatrix zu lösen:  $\sum_{k=1}^n (A\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j)$ . Ist ferner  $A_0(u, v)$  mit  $A_0(u, u) \geq \gamma \|u\|^2$  ( $\gamma > 0$ ) vorgegeben und bestimmen wir in  $H$  eine neue Metrik durch  $[u, u] = A_0(u, u)$ , so erreicht die Funktion  $F = A_0(u, u) - (u, f) - f(u)$  ihr Minimum für dasjenige Element  $f'$ , für das  $(u, f) = [u, f']$  ist. Für den dadurch bestimmten Operator  $f' = Bf$  existiert eine Reziproke  $A_0 = B^{-1}$ , und es ist  $A_0(u, v) = (A_0 u, v)$ . Ist nun  $Au$  von der Form  $A_0 u + \lambda Ku$ , so konvergiert das Galerkinsche Verfahren, falls  $A^{-1}$  existiert und überall in  $H$  definiert ist und außerdem  $T = A_0^{-1}K$  vollstetig ist. Dieser (der Sache nach bekannte) Sachverhalt wird auf verschiedene Randwert-Aufgaben der mathematischen Physik angewandt.

Schmeidler (Berlin).

Citlanadze, E. S.: Zur Variationsmethode einer Klasse nichtlinearer Operatoren im Raume  $L_p$  ( $p > 1$ ). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 441—444 (1950) [Russisch].

Es werden Fragestellungen aus der Theorie der nichtlinearen Operatoren im Hilbertschen Raum auf den Raum  $L_p$  ( $p > 1$ ) übertragen. Bezüglich der in Betracht kommenden Arbeiten für den Hilbertschen Raum vgl. man etwa Lusternik (dies. Zbl. 24, 213), Soboleff [C. R. Acad. Sci. USSR, n. S. 31, 735—737 (1941)], Rothe (dies. Zbl. 31, 216) und die dort zitierte Literatur sowie insbesondere Verf. [C. R. Acad. Sci. USSR, n. S. 56, 15—18 (1947) und dies. Zbl. 29, 54].  $f(x)$  sei ein in  $L_p$  definiertes schwachstetiges Funktional mit den Eigenschaften:  $f(x) \geq 0$ , Gleichheit nur für das Nullelement aus  $L_p$ ,  $f(x)$  besitzt ein Fréchet-Differential  $df(x; h)$  ( $h \in L_p$ ). Wegen der Linearität in  $h$  hat man  $df(x; h) = (L(x), h)$  mit  $L(x) \in L_q$  ( $1/q + 1/p = 1$ ).  $L(x)$  ist ein nicht linearer Operator, erzeugt von  $f(x)$  und Gegenstand der Untersuchung.  $L(x)$  besitzt ein Fréchet-Differential und erfüllt in der Einheitskugel  $K_1$  des  $L_p$  eine Lipschitzbedingung (L.B.), wobei die auftretende Konstante  $M$  heiße.  $L(x)$  ist symmetrisch im Sinne der Beziehung  $(dL(x; h), h_1) = (dL(x; h_1), h)$ . Satz 1: Wenn mit einer Konstanten  $c$

$$|f(x+h) - f(x) - (L(x), h)| \leq c \|h\|^2$$

gilt, ist  $L(x)$  vollstetig. Der Beweis beruht auf zwei Hilfssätzen, welche gewisse Approximations-eigenschaften des Haarschen Orthogonalsystems bezüglich  $f(x)$  und  $L(x)$  feststellen.  $x \in L_p$



mit  $\|x\| = 1$  heiße normiertes Eigenelement (n. Et.) von  $L$ , wenn  $L(x) = \lambda N(x)$  mit  $N(x) = |x|^{q/p} \text{sign } x$  erfüllt ist. Mittels der interessanten Ungleichung ( $q > p$ )

$$||\xi|^{q/p} \text{sign } \xi - |\eta|^{q/p} \text{sign } \eta|^p \leq \max [2^p; (q/p)^p] |\xi - \eta|^p (|\xi|^{q-p} + |\eta|^{q-p}),$$

$\xi, \eta$  beliebig reell, und einer ähnlichen Abschätzung folgt man Satz 2: Die Operatoren  $N$  und  $N^{-1}L$  erfüllen in der Kugel  $K_2$  des  $L_p$  mit Radius 2 eine L.B. —  $\Omega(x)$  bezeichne den Operator  $N^{-1}L(x) - (N^{-1}L(x), N(x))x$ , der ebenfalls in  $K_2$  eine L.B. erfüllt.  $\Omega(x)$  wird gleich dem Nullelement aus  $L_p$  nur für die Et. von  $L(x)$ . Für alle  $x$  mit  $\|x\| = 1$  gilt  $(\Omega(x), N(x)) = 0$ , und für die  $x$  aus  $K_2$  gilt  $\|\Omega(x)\| \leq 2^{p+q} M^{q/p} - M_1$ .  $\tau$  sei ein stetiger Parameter  $0 \leq \tau \leq 1/M_1$  und  $x_\tau \in L_p$  stetig von  $\tau$  hängig. Dann erlaubt die Funktionalgleichung  $dx_\tau = \Omega(x_\tau) d\tau$  eine eindeutige Lösung  $x_\tau$ , welche für  $\tau = 0$  mit einem gegebenem Element  $x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$  zusammenfällt.  $x_\tau$  heißt orthogonale Trajektorie (o. Tr.), was gerechtfertigt wird durch das Lemma: Die o. Tr. mit dem „Anfangspunkt  $x_0$ “, der kein Et. von  $L(x)$  ist, liegt ganz auf der Oberfläche von  $K_1$ , also  $((N x_\tau), dx_\tau) = 0$ . Im weiteren wird die Schnirelman-Lusterniksche Theorie, insbesondere der Begriff der Kategorie einer Menge, herangezogen. Hierzu werden  $f(x)$  und  $L(x)$  auf der projektiven Sphre  $K_1$  betrachtet, welche man durch Identifizierung der diametralen Elemente von  $K_1$  erhält.  $\bar{P}_k \in \bar{K}_1$  sei die topologische Klasse der abgeschlossenen und kompakten Mengen der Kategorie  $\geq k$ .  $P$  eine beliebige Menge aus  $\bar{P}_k$ ,  $\gamma = \sup \min f(x)$

und  $\Gamma$  die Menge der Punkte  $\in K_1$  mit  $\gamma - \varepsilon \leq f(x) \leq \gamma + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Nach Konstruktion gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Menge  $P_\varepsilon \in \bar{P}_k$ , so daß  $\min f(x) > \gamma - \varepsilon$ ;  $\{x_\varepsilon\} \in P_\varepsilon$  sei die Menge der

Punkte, für welche das Minimum angenommen wird.  $x_\varepsilon$  sei ein beliebiger Punkt, aber kein Et. der Menge  $\bar{P}_\varepsilon \cap \bar{\Gamma}$ . Es gibt dann ein  $\alpha > 0$ , so daß  $\|\Omega(x_\varepsilon)\| \geq \alpha > 0$ , und um  $x_\varepsilon$  auf der Oberfläche von  $\bar{K}_1$  eine abgeschlossene Sphre mit dem Radius  $2\varepsilon$ , so daß für alle Punkte derselben  $\|\Omega\| \geq \alpha/2$ , d. h. die abgeschlossene Sphre enthält kein Et.  $x_\varepsilon \in \bar{P}_\varepsilon \cap \bar{\Gamma}$  heiße  $\varepsilon$ -Et. von  $L(x)$ , wenn  $\|\Omega(x_\varepsilon)\| < \varepsilon/2M$ , wobei  $M$  die Lipschitzkonstante für  $\Omega$  ist. Satz 3: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $x_\varepsilon \in \bar{P}_\varepsilon \cap \bar{\Gamma}$ , so daß  $x_\varepsilon$   $\varepsilon$ -Et. ist. — Läßt man  $\varepsilon \rightarrow 0$  rücken, erhält man leicht Satz 4:  $L(x)$  besitzt auf der Fläche  $f = \gamma$  mindestens ein Et. — Ausführliche Beweise sind unterdrückt, jedoch wird i. a. das logische Gerippe angedeutet. Schmetterer (Wien).

**Viik, M. I.: Lineare Fortsetzung von Operatoren und Randbedingungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 433—436 (1949) [Russisch].

Geleitet durch das Problem der Bestimmung aller linearen homogenen und (in einem gewissen Sinne) korrekten Randbedingungen für einen gegebenen Differentialoperator, der in einem Bereich des  $n$ -dimensionalen Raumes untersucht wird, wird ein entsprechendes Problem für allgemeine Operatoren formuliert und gelöst. Von dem Operator  $A$  wird vorausgesetzt, daß er im Hilbertschen Raume  $H$  dicht definiert sei und daß sein Umkehroperator  $A^{-1}$  beschränkt sei. Ist  $\vartheta(A)$  sein Definitionsbereich, so soll ein Operator  $A'CA^*$  existieren, so daß  $A'^*\vartheta(A'^*) = H$  ist; dann heißt  $\tilde{A}$  eine korrekte Fortsetzung von  $A$ , wenn  $\tilde{A}\vartheta(\tilde{A})$  mit dem gesamten Hilbertschen Raum übereinstimmt und wenn  $\tilde{A}$  einen beschränkten Umkehroperator besitzt. Unter diesen Voraussetzungen existiert mindestens eine korrekte Fortsetzung  $\tilde{A}$ , so daß  $AC\tilde{A}CA^*$ . Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß  $\tilde{A}$  korrekte Fortsetzung von  $A$  ist. Es folgen Anwendungen auf Differentialoperatoren und Randbedingungen. Schmeidler.

**Yamabe, Hidehiko: On an extension of the Helly's theorem.** Osaka math. J. 2, 15—17 (1950).

„Wenn in einem normierten, nicht notwendig vollständigen Vektorraum  $E$  eine konvexe Menge  $M$  überall dicht liegt, kann man in jeder  $\varepsilon$ -Nachbarschaft von  $a \in E$  ein  $b \in M$  finden, so daß für  $n$  in  $E$  gegebene lineare Funktionale  $f_1, \dots, f_n$ , die Gleichungen  $f_i(a) = f_i(b)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bestehen.“ Da nun, nach Weierstraß, im Raume  $E$  der in einem abgeschlossenen Intervall einer reellen Veränderlichen  $t$  stetigen Funktionen die Polynome überall dicht liegen und eine konvexe Menge  $M$  bilden, so folgt, daß, wenn die linearen Funktionale  $f_i$ , die stetige Funktion  $g(t)$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben sind, man ein Polynom  $p(t)$  finden kann, so daß  $\sup |g(t) - p(t)| < \varepsilon$  und  $f_i(g(t)) = f_i(p(t))$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) erfüllt sind. Der Zu-

sammenhang des obigen Satzes und seiner Folgerung mit der in der Überschrift angedeuteten und in Fußnote 1 zitierten Arbeit von E. Helly [Mh. Math. Phys. 31, 60—91 (1921)] ist dem Ref. nicht klar geworden, wohl aber könnte man den in Jber. Deutsche Math. Verein. 36 bewiesenen Hellyschen Satz heranziehen, um den auf S. 15, Z. 2 v. u. gezogenen Schluß („This contradicts the hypothesis (1)“ besser zu begründen. *F. Levi (Bombay).*

**Morse, Marston and William Transue:** Functionals  $F$  bilinear over the product  $A \times B$  of two pseudo-normed vector spaces. II. Admissible spaces  $A$ . Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 576—614 (1950).

Im Teil I der Arbeit (dies. Zbl. 35, 71) wurde die Darstellung von Funktionalen, die bilinear auf dem Produkt von zwei pseudo-normierten Vektorräumen  $A, B$  sind, durch iterierte Lebesgue-Stieltjes-Integrale:

$$F(x, y) = \int_{R_1} x(s) d_s \int_{R_1} y(s) d_t k(s, t)$$

behandelt, wobei die Funktionale durch die am Schluß des Referates über I genannten Bedingungen eingeschränkt wurden. In I wurde das Problem, diejenigen Verteilungsfunktionen  $k(s, t)$  zu bestimmen, die diesen Bedingungen genügen, unter der Annahme gelöst, daß die Räume  $A, B$  gewisse komplizierte, dort mit I bis V bezeichnete Voraussetzungen erfüllen. In dem vorliegenden Teil II wird gezeigt, daß die üblicherweise mit  $C, c, L_p, l_p$  bezeichneten Räume sowie die von W. Orlicz eingeführten Räume und weitere Verallgemeinerungen zulässig sind, d. h. den Voraussetzungen I bis V genügen. *Doetsch (Freiburg i. Br.).*

**Eidelheit, M.:** Quelques remarques sur les fonctionnelles linéaires. Studia math. 10, 140—147 (1948).

Ist  $M$  eine transfinit abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit im konjugierten Raum  $E$  eines Banachraumes  $E$ , so ist die Entfernung eines linearen Funktional  $f_0 \in E$  von  $M$  gleich der oberen Grenze der Entfernung von  $f_0$  von allen  $M$  enthaltenden Hyperebenen. Aus dieser einfachen Folgerung aus dem Satz von Hahn und Banach ergibt sich: Damit eine Folge von Linearkombinationen der linearen Funktionale  $f_n(x)$  existiert, die gegen das lineare Funktional  $g(x)$  konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß für jede beschränkte Folge  $x_k$  aus  $E$  aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = 0$  für  $n = 1, 2, \dots$  stets  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = 0$  folgt. Als Anwendung wird bewiesen, daß für eine in  $[-1, 1]$  im Lebesgueschen Sinn integrierbare Funktion

$$\varphi(t) \text{ aus } \int_{-1}^{+1} \varphi(t) t^k dt = 0 \text{ für } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ stets } \left| \int_{-1}^{+1} \varphi(t) t^n dt \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)| dt$$

folgt und daß die Konstante  $1/2^{n-1}$  nicht verbessert werden kann. Ferner wird eine notwendige Bedingung für die Unlösbarkeit gewisser homogener linearer unendlicher Gleichungssysteme mit nichtverschwindenden Abschnittsdeterminanten abgeleitet.

*G. Köthe (Mainz).*

**Dvoretzky, A. and C. A. Rogers:** Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 192—197 (1950).

Eine Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$  in einem Banachraum heißt absolut konvergent, wenn  $\sum \|x_i\| < \infty$  ist, unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung der Reihe  $\sum x_i$  konvergiert. Es wird bewiesen, daß in einem unendlichdimensionalen Banachraum zu jeder Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, c_i > 0$ , eine unbedingt konvergente Reihe  $\sum x_i$  mit  $\|x_i\|^2 = c_i$  existiert. Nur in einem endlichdimensionalen Banachraum ist also jede unbedingt konvergente Reihe auch absolut konvergent. Der Beweis beruht auf folgendem Satz über konvexe Körper  $C$  mit Mittelpunkt 0 in  $R_n$ : Es gibt  $n$  Punkte  $A_1, \dots, A_n$  auf dem Rand von  $C$ , so daß für irgendwelche reelle  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 1 \leq r \leq n$ ,



der Punkt  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$  stets in  $\lambda C$  liegt,  $\lambda^2 = [2 + r(r-1)/n]$  ( $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2$ ). Aus diesem Satz ergeben sich weitere Folgerungen über konvexe Körper  $C$  mit dem Mittelpunkt 0: Es gibt stets Punkte  $P_1, \dots, P_n$  auf dem Rand von  $C$ , so daß alle  $2^n$  Punkte  $\pm P_1 \pm \dots \pm P_n$  in  $2n^{\frac{1}{2}} C$  liegen. Es gibt ein Ellipsoid  $E$  in  $C$  und ein Parallelepiped  $P$  um  $C$ , so daß für die Volumina gilt

$$\frac{V(P)}{V(E)} \leq \frac{2^n}{J_n} \left( \frac{n^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$J_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel. Ist schließlich  $K$  der polarreziproke konvexe Körper zu  $C$ , so gilt

$$\frac{2^n J_n}{(n! n^n)^{\frac{1}{2}}} \leq V(C) V(K) \leq 2^n J_n \left( \frac{n^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

G. Köthe (Mainz).

**Tola Pasquel, José und César Abuauad:** Über die Äquivalenz von drei Stetigkeitsdefinitionen für Funktionen in Räumen, in denen konvergente Folgen mehr als einen Limes haben können. *Rev. Ci., Lima* **51**, 21—28 (1949) [Spanisch].

Un ensemble  $X$  constitue un espace  $L_1$ , si la notion de suite convergente y est définie, c.-à.-d. si à certaines suites  $\{p_n\}$  on fait correspondre une ou plusieurs limites de manière à satisfaire aux axiomes suivantes: 1. si  $p$  est limite de  $\{p_n\}$ , alors  $p$  est aussi limite de toute sous-suite  $\{p'_n\}$ ; 2. si  $p_n = p$ , alors  $\{p_n\}$  a pour limite  $p$ . (Si toute suite convergente a une seule limite on obtient les espaces  $L$  de Fréchet.) Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces  $L_1$ , on peut donner trois définitions d'une application continue de  $X$  dans  $Y$ . D 1.  $f(x)$  est continue D 1 en  $p$ , si  $A$  étant un ensemble quelconque dans  $X$ , tel que  $p \in A$ , on a  $f(p) \in f(A)$  ( $A$  désignant la fermeture de  $A$ ). D 2.  $f(x)$  est continue D 2 en  $p$ , si pour toute suite  $p_n \rightarrow p$  il existe une sous-suite  $\{p'_n\}$ ; telle que  $f(p'_n) \rightarrow f(p)$ . D 3.  $f(x)$  est continue D 3 en  $p$  si  $p_n \rightarrow p$  entraîne  $f(p_n) \rightarrow f(p)$ . Si  $f(x)$  est continue D 3, elle est aussi continue D 2, si  $f(x)$  est continue D 2, elle est aussi continue D 1. Pour que toute  $f(x)$  continue D 1 soit aussi continue D 2, il faut et il suffit que  $Y$  vérifie la condition suivante: si  $\{\eta_n\}$  est une suite pour laquelle  $\eta_n, \eta_n, \eta_n, \dots \rightarrow \eta$  pour tout  $n$ , alors il existe une sous-suite  $\{\eta'_n\}$  de  $\{\eta_n\}$ , telle que  $\eta'_n \rightarrow \eta$ . Pour que toute  $f(x)$  continue D 2 soit aussi continue D 3, il faut et il suffit que  $Y$  vérifie la condition suivante: si  $\{\eta_n\}$  ne converge pas vers  $\eta$ , il existe une sous-suite de  $\{\eta_n\}$  dont aucune sous-suite ne converge pas vers  $\eta$ .

Horváth (Paris).

### Praktische Analysis:

**Sprega, Annibale Renato:** Da Gauss a Banachiewicz e viceversa. *Archimede, Firenze* **2**, 63—68 (1950).

Man kann den Gaußschen Übergang von einem Gleichungssystem  $\sum_{v=1}^n a_{\mu v} x_v = a_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) zu einem äquivalenten von der Form  $\sum_{v=\mu}^n \alpha_{\mu v} x_v = \alpha_\mu$  deuten als Lösung der Aufgabe, eine Darstellung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

zu gewinnen. (Hierzu: T. Banachiewicz, *Étude d'analyse pratique*, *Bull. intern. Acad. Polonaise Sci. Lett., Cl. Sci. math. nat. A.* **1938**). — Nachdem der Verf. diesen einfachen Tatbestand mit dem Nimbus des Geheimnisvollen umgeben hat, gelingt es ihm doch, zu zeigen, daß es vorteilhaft ist, von der starren Gaußschen Rechenvorschrift abzuweichen, jedenfalls dann, wenn man auf Rechenmaschinenarbeit eingestellt ist.

R. Schmidt (München).

**Stein, P. and R. L. Rosenberg:** On the solution of linear simultaneous equations by iteration. J. London math. Soc. **23**, 111—118 (1948).

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens in Gesamtschritten bzw. in Einzelschritten ist gleichbedeutend mit der Konvergenz einer Matrizenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} C^n$  bzw.

$\sum_{n=0}^{\infty} C^{*n}$ , wo  $C = L + R$ ,  $C^* = (I - L)^{-1} R$  und  $L$  (bzw.  $R$ ) eine Matrix ist, die nur unterhalb (bzw. oberhalb) der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente enthält. Verf. leiten zunächst einige neue Kriterien für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens her und beweisen dann, daß die Reihen  $\sum C^n$  und  $\sum C^{*n}$  gleichzeitig divergieren bzw. konvergieren (und zwar die letztere besser), falls  $C$  keine negativen Elemente enthält. Schließlich wird die Konvergenzgüte der Reihen  $\sum C^{*n}$  und  $\sum C'^{*n}$  verglichen, wo  $C'^{*}$  die zur gestürzten Matrix  $C'$  gehörige Matrix  $(I - R')^{-1} L'$  bedeutet. Daraus ergibt sich als praktische Folgerung, daß man im Falle einer Matrix  $C$  mit nichtnegativen Elementen die Numerierung der Gleichungen und Unbekannten am besten so wählt, daß  $R$  die kleineren Elemente enthält. Hauptbeweismittel sind die Sätze von Frobenius über charakteristische Wurzeln von Matrizen mit positiven Elementen. Weissinger (Hamburg).

**Rabbeno, Giorgio:** Quadrature grafiche col metodo di Cebiceff. Pubbl. Fac. Sci. Ing., Univ. Trieste, Ser. A. Nr. 27, 7 S. (1949).

Verf. schildert einen Mechanismus, der die Quadratur nach dem Verfahren von Tschebyscheff erleichtert, und vergleicht die hiermit gefundenen Ergebnisse mit denen anderer Verfahren an einigen Beispielen. W. Meyer zur Capellen (Aachen).

**Guest, P. G.:** Orthogonal polynomials in the least squares fitting of observations. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 41, 124—137 (1950).

Es handelt sich um die angenäherte Darstellung eines Kurvenverlaufes, der durch  $n$  Beobachtungen  $y(x_v)$ ,  $v = 1, 2, 3, \dots, n$ , gegeben ist.  $y(x)$  wird mittels Tschebyscheffscher Polynome  $T_p(x)$  angesetzt als

$$u_p(x) = a_p T_p(x) + a_{p-1} T_{p-1}(x) + \dots + a_1 T_1(x) + a_0$$

und  $a_k$  aus der Bedingung, daß  $\sum_{v=1}^n (y(x_v) - u_p(x_v))^2$  ein Minimum sei, zu

$a_p = \frac{\sum_{v=1}^n y(x_v) T_p(x_v)}{\sum_{v=1}^n T_p^2(x_v)}$  bestimmt. Die Tschebyscheffschen Polynome werden mittels Rekursionsformeln berechnet. Für die in den Rekursionsformeln auftretenden Koeffizienten und die in den  $a_k$  enthaltenen Momente und Potenzsummen werden Rechenschemata angegeben, die zu den ausgeglichenen  $v$ -Werten, den Koeffizienten  $a_k$  und den Koeffizienten  $k_{r,s}$  der nach Potenzen von  $x$  geordneten  $u_p(x)$  auch die wahrscheinlichen Fehler dieser Größen enthalten. Heinhold.

**Lorenz, Paul:** Eine Herleitung der Stirlingschen Formel

$$n! = n^n \sqrt{\pi 2 n} \cdot e^{-n} + \frac{n^{-1}}{12} - \frac{n^{-3}}{360} + \frac{n^{-5}}{1260} - \vartheta_8(n) \frac{n^{-7}}{1680}$$

mit kleinstem Aufwand. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 222—226 (1950).

Wenn man die im Titel genannte Formel ohne besondere Vorbereitungen und losgelöst aus größeren Zusammenhängen herleiten will, so ist es das Gegebene, den Weg der Verifizierung zu gehen, d. h. zu zeigen:

$$\lg \mu(n) = \lg \left( n! e^n / n^n \sqrt{\pi 2 n} \right) = \frac{n^{-1}}{12} - \frac{n^{-3}}{360} + \frac{n^{-5}}{1260} - \vartheta_8(n) \frac{n^{-7}}{1680}.$$

Verf. geht diesen Weg und zieht mit Vorteil die erste Differenz  $\Delta \lg \mu(n)$  heran (und nicht mehr). Verf. kommt mit kleinem Aufwand aus; ob mit kleinstem, mag dahingestellt bleiben. R. Schmidt (München).

**Vernotte, Pierre:** L'interpolation idéale par les expressions non uniformes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 2000—2002 (1950).



Berichtigung eines Fehlers in der Note des Verf.: *Théorie et pratique des séries divergentes*, Publ. Sc. et Techn. Minist. Air, série grise, No. 207, Paris 1947.

R. Schmidt (München).

Malavard, Lucien et Jean Boscher: *Sur la détermination numérique de fonctions biharmoniques par un procédé analogique*. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1493—1495 (1950).

On réalise au bassin électrique les deux fonctions harmoniques  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  telle que la fonction biharmonique s'écrive  $x\varphi(x, y) + \psi(x, y)$ . Application à des problèmes d'élasticité plane. La méthode s'adapte facilement à d'autres problèmes aux limites.

Gran Olsson (Trondheim).

Salzer, Herbert E.: *Tables of coefficients for interpolating in functions of two variables*. J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 294—305 (1948).

Die in dem zu betrachtenden Fall besonders vorteilhafte Gregory-Newtonsche Interpolationsformel lautet im Falle zweier Variablen

$$f(x + p h_1, y + q h_2) = \sum_{i+j=0}^n \binom{p}{i} \binom{q}{j} \Delta_{x^i y^j}^i f(x, y),$$

wo  $h_1$  und  $h_2$  die Tafelschritte von  $x$  und  $y$  sind, deren Werte als äquidistant angenommen werden. Sie läßt sich in die Form

$$f(x + p h_1, y + q h_2) = \sum_{s+t=0}^n C_{s,t} f_{s,t} = \sum_{s+t=0}^n \binom{n-p-q}{n-s-t} \binom{p}{s} \binom{q}{t} f_{s,t}$$

bringen, wobei  $s+t$  von 0 bis  $n$  geht. Dem von W. E. Milne gegebenen, für beliebig viele Variable gültigen, Beweis wird vom Verf. ein neuer, auf Induktion gegründeter zur Seite gestellt. Die Anwendung der letzteren, wesentlich bequemer Formel wird durch Tabulieren der exakten Werte  $C_{s,t}$  für quadratische, kubische und biquadratische Interpolation sehr erleichtert. Der Schritt ist 0,1. Nyström.

Wijngaarden, A. van: *Table of the cumulative symmetric binomial distribution*. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **53**, 857—868, Indag. math., Amsterdam **12**, 301—312 (1950).

Fünfstellige Tabellen der bei H. Theil (dies. Zbl. **36**, 216) auftretenden kumulativen symmetrischen binomischen Verteilungsfunktion  $P(n, c) = 1 - 2^{1-n} \cdot \sum_{s=0}^c \binom{n}{s}$ ,  $n = 2c + 1, 2c + 2, \dots$  für  $c = 0, 1, 2, \dots, 99$  und  $n - 2c = 1, 2, \dots, 65$ . Infolge der Rekursionsformel  $P(n, c-1) - P(n, c) = 2^{1-n} \cdot \binom{n}{c}$  können diese Tabellen auch zur Ablesung von  $\binom{n}{c}$  benutzt werden. Die auf Grund der Beziehung  $P(n, c) = 1 - 2 \cdot J_{\frac{1}{2}}(n - c, c + 1)$  zur unvollständigen Beta-Funktion

$$\begin{aligned} J_x(p, q) &= \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \bigg/ \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\ &= \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) / \Gamma(p+q) \end{aligned}$$

ebenfalls verwendbaren Tafeln von K. Pearson (Tables of the incomplete Beta-function, Cambridge 1934; dies. Zbl. **8**, 304) der letzteren sind hingegen nur für  $n \leq 50$  ausreichend.

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Nejšul'er, L. J.: *Über K-gliedrige Tafeln von Funktionen dreier Veränderlicher, die Summe von Produkten von Funktionen einer Veränderlichen sind*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **55**, 191—194 (1947) [Russisch].

In preceding papers [the same journal **36** (1943); **43** (1944); this Zbl. **29**, 146] the author had characterized classes of functions  $f(x_1, x_2, x_3)$  of three real variables, which can be expressed as the superposition of  $K$  functions of two variables ( $K$ -gliedrige

Funktionen), i.e. of the types  $G[F(x_p, x_q), x_r]$ , (or 2-gliedrige),  $H\{G[F(x_p, x_q), x_r], x_s\}$ ,  $H[F(x_p, x_q), G(x_r, x_s)]$ , (or 3-gliedrige), and so on, where  $p, q, r, s = 1, 2, 3$ . Such functions can be given therefore easily by means of tables of functions of two variables. In the present paper the author proves that the functions of the kind

$$u = f(x_1, x_2, x_3) = \Phi \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i1}(x_1) f_{i2}(x_2) f_{i3}(x_3) + \varphi_1(x_p) \varphi_2(x_q) + \psi(x_r) \right\}, \quad p, q, r = 1, 2, 3,$$

have the previous property, and discusses the actual construction of the tables.

*L. Cesari (Bologna).*

**Nejštuler, L.:** Über die optimalen dreidimensionalen zweigliedrigen Tafeln von Funktionen dreier Veränderlicher. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 965—968 (1948) [Russisch].

The author discusses some details for the construction of tables of functions  $f(x_1, x_2, x_3)$  of three real variables, which can be expressed as the superposition of functions of two variables  $G[F(x_p, x_q), x_r]$ ,  $p, q, r = 1, 2, 3$ , in order to reduce the actual size of the tables.

*L. Cesari (Bologna).*

● **Computation Laboratory of the National Bureau of Standards: Tables of Bessel functions of fractional order. Vol. II.** New York: Columbia University Press 1949. 365 p., \$ 10.00.

## Geometrie.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Teixidor, J.:** Über die Filarevolvente einer Raumkubik. Gac. mat., Madrid I. Ser. 2, 73—77 (1950) [Spanisch].

**Rossier, Paul:** Sur une classe de courbes planes généralisant la conchoïde de Nicomède. Arch. Sci., Genève 3, 157—159 (1950).

**Sypták, M.:** Les spirales d'ordre  $m$  dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions. Časopis Mat. Fys., Praha 72, 107—126 und franz. Zusammenfassg. 126—127 (1947) [Tschechisch].

Dans le présent article, j'étudie certaines courbes de l'espace euclidien  $R_p$  à  $p$  dimensions ( $p \geq 2$ ) qui sont exprimées dans le système de coordonnées rectangulaires par les équations

$$x_{2i-1} = r_i k s^m \cos l_i s, \quad x_{2i} = r_i k s^m \sin l_i s \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = C k s^m \quad \text{si} \quad p = 2n + 1,$$

$$\Sigma r_i^2 = 1 \quad \text{resp.} \quad \Sigma r_i^2 + C^2 = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma r_i^2 l_i^2 = 1,$$

et que nous appelons les spirales d'ordre  $m$ . Ces courbes sont bien connues dans le plan  $R_2$  où elles peuvent être exprimées dans le système polaire  $\varrho, \omega$  par l'équation  $\varrho = k \cdot \omega^m$  ( $k, m$  étant des constantes  $\neq 0$ ). Je démontre que la plupart des propriétés de ces spirales planes sont conservées dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions. Aux courbes que j'ai ainsi obtenu appartient la spirale hyperbolique ( $m = -1$ ) et celle d'Archimède ( $m = 1$ ), qui jouent un rôle important parmi elles. — Dans le chapitre I, je définis le bicône de rotation avec les équations paramétriques

$$(1) \quad x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = \varrho C \quad \text{si} \quad p = 2n + 1$$

( $\varrho$  = distance du point du sommet du bicône), sur lequel sont situées toutes les spirales de différents ordres. Cette surface est engendrée par une droite qui fait un mouvement de rotation (donné par les équations

$$X_{2i-1} = x_{2i-1} \cos L_i \sigma + x_{2i} \sin L_i \sigma, \quad X_{2i} = -x_{2i-1} \sin L_i \sigma + x_{2i} \cos L_i \sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{et} \quad X_{2n+1} = x_{2n+1} \quad \text{si} \quad p = 2n + 1$$

( $L_i \neq \text{const.}$ ,  $\sigma$  un paramètre) et qui passe par le centre, resp. coupe l'axe de rotation. Dans les chapitres II, III, IV, je présente un nombre de propriétés de ces spirales, par ex.: a) Sur le bicône (1) la spirale d'Archimède (hyperbolique) jouit de la propriété caractéristique d'avoir la subnormale (la subtangente) polaire constante. [Soit  $P$  un point d'une spirale d'ordre  $m$  et  $O$  son pôle (c'est-à-dire le sommet du bicône). Soit  $t$  la tangente de  $P$  et  $T$  le point d'intersection de  $t$  avec l'hyperplan passant par  $O$  et orthogonal à la droite  $\overline{PO}$ . Soit  $N$  le point d'intersection de  $\overline{TO}$  avec l'hyperplan passant par  $P$  et orthogonal à  $t$ . Alors les longueurs  $\overline{PT}$ ,  $\overline{PN}$ ,  $\overline{OT}$ ,  $\overline{ON}$  sont la tangente, la normale, la subtangente et la subnormale polaire.] b) Si l'on projette une hyperhélice dans  $R_{2n+1}$  d'un point de son axe sur l'hyperplan orthogonal à cet axe, on obtient une spirale hyperbolique. c) Les points finaux des tangentes



polaires  $T$  (des normales polaires  $N$ ) d'une spirale d'ordre  $m$  se trouvent sur une spirale d'ordre  $m+1$  (d'ordre  $m-1$ ). Alors les points finaux des tangentes d'une spirale hyperbolique et ceux des normales d'une spirale d'Archimède sont situés sur une hypercirconférence ayant son centre dans le pôle de ces spirales. Etc. — Dans l'appendice sont indiquées quelques propriétés intéressantes de la cochléode donnée dans  $R_{2n}$  par les équations

$$x_{2i-1} = R_i s^{-1} (1 - \cos l_i s), \quad x_{2i} = R_i s^{-1} \sin l_i s \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

( $R_i, l_i \neq 0$ , const.,  $|l_i| \neq |l_j|$  pour  $i \neq j$ ;  $s$  un paramètre). P. ex. a) La cochléode est la projection d'une hyperhélice dans  $R_{2n+1}$  d'un de ses points sur l'hyperplan orthogonal à son axe. b) Elle est le lieu des centres de gravité des arcs  $\widehat{AB}$  d'une hypercirconférence, le point  $A$  étant fixe et le point  $B$  étant mobile sur l'hypercirconférence. *Autoreferat.*

**Nádeník, Zbyněk:** Sur les courbes polaires de la cubique gauche. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 131—D 139 und französ. Zusammenfassg. D 139 (1950) [Tschechisch].

On définit la courbe polaire  $k$  de la courbe  $k$  par rapport à la cubique gauche  $c$  comme le lieu des points conjugués aux points de la courbe  $k$  par rapport à la cubique  $c$ . Dans la première partie, on étudie l'influence du contact de la courbe  $k$  et de la cubique  $c$  sur la courbe polaire  $k$ . La deuxième partie traite les cubiques identiques avec leurs courbes polaires; elles s'appellent autopolaires. On trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que la cubique passante par 4, resp. 3, resp. 2 points de la cubique  $c$  soit autopolaire. *(Autoreferat.)*

**Setzer, Ota:** Somme vectorielle dans l'étude des normales aux coniques et aux surfaces du second degré. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 139—D 144 und französ. Zusammenfassg. D 144 (1950) [Tschechisch].

**Langr, Josef:** Construction de la conique passant par quatre points imaginaires et semblable à une conique donné. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 145—D 151 und französ. Zusammenfassg. D 151 (1950) [Tschechisch].

Suite d'un autre article (ce Zbl. 32, 426). Les points imaginaires  $A_i, B_i, D_i, E_i$  sont donnés par deux involutions elliptiques sur deux droites. On construit le cercle  $l$  quelconque qui passe par les points  $A_i, B_i$  et on choisit convenablement un point  $C$  sur le cercle  $l$ . Ce point  $C$  forme avec les points  $A_i, B_i$  le triangle fondamental de la conjugation isogonale. À l'aide de cette transformation quadratique, qui fait correspondre à la conique cherchée une droite, l'auteur construit cette conique. *(Autoreferat.)*

**Kepr, Bořivoj:** Sur la construction de la parabole donné par les tangentes et par la normale. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 151—D 154 und französ. Zusammenfassg. D 154 (1950) [Tschechisch].

L'auteur résoud ce problème par les méthodes de la géométrie projective en vertu du théorème auxiliaire: Lieu géométrique des points touchés pour les coniques du système  $o(t_1 t_2 t_3 t_4)$  sur les droites  $lu$  faisceau  $M(t, t', t'', \dots)$  est la conique  $k$ , qui passe les points  $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}, M$  et qui touche à  $t_4$  en  $M$ .  $A_{1,2} \equiv (t_1 t_2)$ ,  $A_{1,3} \equiv (t_1 t_3)$ ,  $A_{2,3} \equiv (t_2 t_3)$  et  $M \equiv A_{1,4}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) est le point de  $t_4$ . — Si est donné donc la parabole par les tangentes  $t_1, t_2, t_3$  et par la normale  $n$ , la conique auxiliaire  $k$  (dans ce cas aussi une parabole) coupe la normale donné  $n$  en deux points  $T_x, T_y$ , qui déterminent avec les tangentes  $t_1, t_2, t_3$ , tout les deux solutions du problème donné. *(Autoreferat.)*

**Magin, Ernst:** Die Beziehungen doppelt berührender Kegelschnitte zu den Sätzen von Desargues, Pascal, Brianchon und Monge. Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 288—298 (1950).

Kegelschnitte in doppelter Berührung gehen bei Dualisierung in eine gleiche Lage über. Sie zeigen bei Zugrundelegung von Dreieckskoordinaten mit geringem Aufwand an Rechnung zahlreiche schöne Zusammenhänge. Grundlegend ist die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu finden, der zwei gegebene Kegelschnitte gleichzeitig doppelt berührt; bekanntlich gibt es drei Systeme solcher Kegelschnitte. Verf. betrachtet nun sechs Punkte auf einem Kegelschnitt  $R$ , die zu drei Punktepaaren geordnet werden, und stellt eine Pascalsche Konfiguration mit vier Pascalschen Geraden her. Zu drei Geradenpaaren dieser Konfiguration, deren Scheitel nicht kollinear sind, gibt es einen Kegelschnitt, der jedes dieser drei Paare doppelt berührt. Im ganzen existieren vier solche Kegelschnitte. Die Pascal-Figur wird nun in der Weise generalisiert, daß drei Geradenpaare, die sich in den drei Punktepaaren auf  $R$  paarweise schneiden, zu drei beliebigen Kegelschnitten  $P, Q, S$  von der gleichen Lage verallgemeinert werden. Eine fundamentale Eigenschaft dieser

drei Kegelschnitte ist, daß ein Kegelschnitt  $T$  existiert, der alle drei gleichzeitig doppelt berührt. Weitere Verallgemeinerungen entstehen, wenn man jedes der drei Punktepaare auf  $R$  durch einen eigentlichen Kegelschnitt ersetzt, der  $R$  doppelt berührt, und sodann die drei Kegelschnitte  $P, Q, S$  konstruiert, die je zwei von diesen drei Kegelschnitten doppelt berühren. Auch hier existiert ein Kegelschnitt  $T$ , der die drei Kurven  $P, Q, S$  gleichzeitig doppelt berührt. Schließlich wird dieser Fall spezialisiert, indem Verf. unter  $R$  das zyklische Punktepaar versteht, so daß die drei Kegelschnitte, die  $R$  doppelt berühren, in Kreise übergehen. Alle diese Fälle werden auch dualisiert. Die so entstehenden verwickelten Konfigurationen offenbaren enge Zusammenhänge zwischen den im Titel der Arbeit genannten Sätzen, die als Sonderfälle dieser Konfigurationen erscheinen. *E. Löffler.*

**Herrmann, Horst:** Vollständige regelmäßige Konfigurationen. Arch. Math., Karlsruhe 2, 207—215 (1950).

Punkt-Geraden-Ebenen-Konfigurationen im Raume werden hier als regelmäßig und vollständig bezeichnet, wenn jedes Paar koplanarer Konfigurationsgeraden mit einem Konfigurationspunkt und einer Konfigurationsebene inzident ist und umgekehrt in jeder Konfigurationsebene durch jeden Konfigurationspunkt genau zwei Konfigurationsgerade gehen. Von diesen Konfigurationen werden besonders die „Binomialfiguren“ betrachtet, die aus  $\binom{n}{k-1}$  Punkten,  $\binom{n}{k}$  Geraden und  $\binom{n}{k+1}$  Ebenen bestehen. Ihre arithmetischen Bestimmungsstücke sind durch  $n$  und  $k$  eindeutig festgelegt. Für je sechs solche Konfigurationen, die bei festem  $n$   $k$ -Werten  $t-1, t, t+1, n-t+1, n-t, n-t-1$  entsprechen, bestehen „Verwandtschaften“, die näher beschrieben werden. Ähnliche Beziehungen gelten für 4-stufige Konfigurationen im  $R_4$ . *F. Levi (Bombay).*

**Venkataaraman, M.:** The Langley chain. Math. Student, Madras 17, 36—37 (1950).

Die „Langley-Kette“ besagt folgendes:  $O, P_1, P_2, P_3, \dots$  seien Punkte auf einem Kreis. Zwei Punkte  $P_a, P_b$  bestimmen eine Gerade  $l_{ab} = P_a P_b$ . Drei Punkte  $P_a, P_b, P_c$  bestimmen eine Gerade  $l_{abc}$ ; sie enthält die Projektionen von  $O$  auf die Geraden  $l_{ab}, l_{bc}, l_{ca}$ . Vier Punkte  $P_a, P_b, P_c, P_d$  bestimmen eine Gerade  $l_{abcd}$ ; sie enthält die Projektionen von  $O$  auf die vier Geraden  $l_{abc}, \dots$ . Und so weiter. Verf. leitet die Langley-Kette aus der „centrecircle-Kette“ her:  $C_n$  sei eine spezielle Kurve  $n$ -ter Klasse, die die Ferngerade der Ebene  $(n-1)$ -mal in Punkten berührt, die zu den Kreispunkten apolar sind und in gleichgeneigten Richtungen liegen. Von diesen Kurven gilt der bekannte Satz: Der Ort der Brennpunkte der  $n$  gegebene Geraden berührenden Kurven  $C_{n-1}$  ist ein Kreis — der „centrecircle“ der  $n$  Geraden. Nimmt man an, daß alle  $n$  Geraden eine Parabel mit dem Brennpunkt  $O$  berühren, so erhält man den obigen Satz von der Langley-Kette. *Zacharias (Quedlinburg).*

**Hohenberg, F.:** Die linearen und quadratischen Gebilde der komplexen affinen Ebene. S.-B. Akad. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., IIa 157, 177—236 (1949).

Die sehr umfangreiche Abhandlung beinhaltet die Abbildung der komplexen affinen Ebene (einer vierparametrischen Mannigfaltigkeit komplexer Punkte) auf folgende vierparametrische Mannigfaltigkeiten reeller Elemente: Die Punktfelder zweier Ebenen  $e_1, e_2$ , die Strahlmannigfaltigkeit  $\mathcal{S}$  des Euklidischen Raumes  $R_3$  und die Gesamtheit der Punkte eines linearen  $R_4$ . Im ersten Hauptteil werden die linearen Gebilde erster, zweiter und dritter Stufe von  $\varepsilon$  sowie deren reelle Bilder in  $\mathcal{S}$  und  $R_4$  betrachtet (Paraboloide, Strahlnetze und lineare Komplexe in  $\mathcal{S}$  bzw. Gerade, Ebenen und Hyperebenen in  $R_4$ ); zahlreiche Sonderfälle werden diskutiert. — Im zweiten Hauptteil werden zunächst die quadratischen Kettengebilde, sodann die komplexen Kegelschnitte und Hyperkegelschnitte von  $\varepsilon$  (Mannigfaltigkeiten von  $\infty^2$  bzw.  $\infty^3$  komplexen Punkten) in analoger Weise definiert und auf die Bildräume  $e_1, e_2$  bzw.  $\mathcal{S}$  und  $R_4$  bezogen. Den komplexen Ketten und Kongruenzen entsprechen

in  $\mathbb{S}$  spezielle Regelflächen 4-ten Grades bzw. Cremona-Kongruenzen (4, 4), während sie im  $R_4$  durch reelle Parabeln bzw. Flächen dargestellt werden, die mit der Veronesischen Fläche in engem Zusammenhang stehen. Die komplexen Kegelschnitte von  $\varepsilon$  werden in  $\mathbb{S}$  auf spezielle Kongruenzen (4, 4) mit isotropen Brennflächen abgebildet, in  $R_4$  dagegen auf die Schnittflächen zweier algebr. Hyperflächen 2. Ordnung. Die komplexen Hyperkegelschnitte, die Verf. zunächst allgemein beschreibt und klassifiziert, ergeben bei Abbildung auf das Ebenenpaar  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  Punkt-Kreis-Verwandtschaften, im  $R_4$  entsprechen ihnen Hyperflächen 2. Ordnung, im Strahlraum  $\mathbb{S}$  werden sie durch zirkuläre quadratische Komplexe dargestellt. Die Beschreibung der einzelnen Typen dieser (auch sonst in der Literatur wiederholt betrachteten) Komplexe führt auf zahlreiche interessante Zusammenhänge mit anderen Zweigen der projektiven Geometrie, z. B. nichteuklidische Schraubungen, Spiraltransformationen im Raume  $\mathbb{S}$  u. a. m.

H. Horninger (Istanbul).

**Hohenberg, Fritz:** Reelle birationale Strahlverwandtschaften im Raum als Bilder komplexer ebener Cremonatransformationen. *Mh. Math.*, Wien **53**, 324—335 (1949).

Verf. definiert eine (zur bekannten kinematischen Abbildung von Blaschke isotrop affine) Zuordnung zwischen den reellen Geraden des Euklidischen Raumes  $\mathbb{S}$  und den komplexen Punkten einer reellen Ebene  $\varepsilon$ , wobei zwei feste Spurebenen  $\pi_1, \pi_2$  verwendet werden. Jede Gerade  $g$  des Raumes  $\mathbb{S}$  schneidet  $\pi_1$  und  $\pi_2$  in je einem Punkt  $P_1$  bzw.  $P_2$ ; der erste besitzt in  $\pi_1$  ein bestimmtes Koordinatenpaar  $x_1, y_1$ , der zweite in  $\pi_2$  ein Koordinatenpaar  $x_2, y_2$ . Der  $g$  entsprechende Bildpunkt in  $\varepsilon$  ist durch die komplexen kartesischen Koordinaten  $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2$  festgelegt. Jeder Kurve von  $\varepsilon$  entspricht eine Strahlkongruenz in  $\mathbb{S}$ , deren Brennflächen zwei Kegel sind. Jede Cremona-Transformation  $n$ -ten Grades in  $\varepsilon$  induziert eine Strahltransformation vom Grad  $2n$  im Raume  $\mathbb{S}$ ; besonderes Interesse verdienen dabei die Transformationen, bei denen die Ferngerade von  $\varepsilon$  eine ausgezeichnete Rolle spielt. So entsprechen z. B. den reellen Affinitäten von  $\varepsilon$  perspektive Kollineationen in  $\mathbb{S}$ , während eine bestimmte Gruppe gleichsinniger Ähnlichkeiten von  $\varepsilon$  auf die Gruppe der quasielliptischen Geometrie in  $\mathbb{S}$  abgebildet wird usw.

H. Horninger (Istanbul).

**Gavrilović, Bogdan:** Über die Abbildung der Punktmengen in einer transfiniten Menge kongruenter projektiver Punktreihen. *Glas Srpske Akad. Nauka CXCI* (I, 96), 125—134 und deutsche Zusammenfassg. 134—138 (1948) [Serbisch].

L'A. considera due punteggiate  $(A)$  e  $(B)$  descritte rispettivamente dai punti  $A_1 + \lambda A_2 = 0$  e  $B_1 + \mu B_2 = 0$  e le suppone sovrapposte in modo che i punti  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$  coincidano e così pure i punti  $\lambda = \lambda_2, \mu = \infty$ , mentre per  $\lambda = -1, \mu = -1$ , si ottengono i punti all'infinito. Allora la proiettività identica che fa corrispondere alla terna  $(0, \lambda_2, -1)$  di  $(A)$  la terna  $(0, \infty, -1)$  di  $(B)$  è rappresentata dall'equazione:  $\lambda \mu + (1 + \lambda_2) \lambda - \lambda_2 \mu = 0$  e al variare di  $\lambda_2$  si ha un insieme transfinito di punteggiate proiettive congruenti che l'A. rappresenta in due diverse maniere sui punti di un piano.

P. Buzano (Torino).

**Wylie jr., C. R.:** The uniqueness of a certain line involution. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 633—638 (1949).

In this note the author, recalling the four quantities  $m, i, k, n$  possessed by any line involution in  $S_3$  with the property that a general line and its image do not intersect (Wylie jr., this Zbl. **35**, 223) establishes the fact that there is a unique involution associated with the set  $m = n = 2, i = k = 1$ . *M. Piazzolla Beloch.*

**Deđo, Modesto:** Sulle trasformazioni quadratiche e su alcuni procedimenti classici in cui esse si presentano implicitamente. *Periodico Mat.*, IV. S. **27**, 73—88 (1949).

Breve trattazione degli elementi più salienti della teoria delle trasformazioni quadratiche con applicazioni alla generazione delle più note curve piane.

M. Piazzolla Beloch (Ferrara).



Cartan, Élie: Deux théorèmes de géométrie anallagmatique réelle à  $n$  dimensions. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 1—12 (1949).

Stimmt inhaltlich überein mit der in dies. Zbl. 32, 114 besprochenen Arbeit.  
W. Blaschke (Hamburg).

### Algebraische Geometrie:

• Enriques, Federigo: Le superficie algebriche, con prefazione di G. Castelnuovo. Bologna: Nicola Zanichelli 1949. XVI, 464 p.

L'ouvrage posthume d'Enriques résume, comme le dit fort bien Castelnuovo, dans sa préface l'essentiel de sa contribution à l'édification de la géométrie algébrique; on doit vivement regretter que la mort prématurée de l'A. ne lui ait pas permis de revoir personnellement l'ouvrage et que le temps de son élaboration n'ait pas permis de prendre connaissance de certains résultats non encore parvenus en Italie. Il y a lieu de se féliciter du dévouement de Pompili et Franchetta qui ont accepté la lourde tâche de remettre en ordre les manuscrits, parfois de les compléter ou de les émender, il est vrai aidés de l'appui autorisé de Castelnuovo. — La théorie générale des systèmes linéaires est exposée en 4 chapitres de manière sensiblement analogue à l'ancien Enriques-Campedelli (Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, Padova 1932; ce Zbl. 5, 409), mais traitée plus à fond et de manière très rigoureuse. Sont à noter les développements sur les courbes exceptionnelles parties fixes du système canonique, sur la régularité du système adjoint en particulier du bicanonique, points de départ de résultats récents de Franchetta (ce Zbl. 35, 223, 224). — Le chapitre V reprend la 1<sup>re</sup> partie du second volume de l'Enriques-Campedelli [Rend. Semin. mat. Fac. Sci. Univ. Roma, III. S. 1<sup>II</sup>, 7—190 (1934); ce Zbl. 10, 219] en y tenant compte des objections de Zarisky (Algebraic Surfaces, Berlin 1935; ce Zbl. 10, 371) sur le calcul des modules. L'A. introduit également l'étude des formes limites de la courbe de diramation d'un plan multiple selon la méthode de Chisini (ce Zbl. 9, 407; 19, 368; 22, 162) méthode dont il espérait beaucoup plus qu'il n'a été jusqu'ici possible d'obtenir. — Le théorème de Castelnuovo sur la rationalité des surfaces fournit la matière du Ch. VI, alors que le VII est consacré à l'étude des surfaces de genre linéaire unité; il est à noter que le § 4 qui reprend des résultats antérieurs dans le cas  $P > 1$  n'arrive pas à la solution complète du problème à laquelle vient seulement de parvenir F. Gaeta [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 570 (1950)]. Les surfaces canoniques font l'objet du chapitre suivant; les premiers types seuls sont ici étudiés sous certaines hypothèses restrictives; il reste là un champ de recherches, telles les récentes de P. Burniat [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 203—207 (1950)]. — L'étude des systèmes continus sur une surface irrégulière et le fameux théorème d'Enriques énoncé en 1904 mais dont seule la démonstration transcendante d'Henri Poincaré reste inattaquable, constitue l'essentiel du Ch. VIII. Enriques qui dans de nombreux mémoires a cherché à lever les difficultés du problème reprend à nouveau toute la question en exposant le déroulement historique et exposant le schéma des tentatives avortées de lui-même, de Severi, de B. Segre. Dans le cas du genre géométrique nul il donne une démonstration satisfaisante à partir de la déficience de la série caractéristique d'un système linéaire et de la construction d'un système continu au moins  $\infty^2$ ; dans le cas général la difficulté est de montrer que la série caractéristique coupée sur une courbe par toutes celles du système continu est complète. L'A. fait alors une intéressante discussion critique pour montrer que la propriété à démontrer est intégrale alors que toutes les démonstrations qui ont été tentées ne sont que différentielles. Pour surmonter la difficulté Enriques propose la construction de courbes décomposées infiniment voisines dans les voisinages d'ordres successifs, mais cette méthode ne paraît pas arriver à la rigueur désirable. Le problème de cette démonstration algébro-géométrique reste donc ouvert. Une étude rapide du système paracanonique relève une erreur de l'A. et pose le problème non encore résolu de la dimension de ce système continu et de celle des systèmes linéaires qui y sont contenus. Une intéressante digression sur les variétés de Picard montre tout l'intérêt que pourrait avoir leur emploi systématique dans l'étude des surfaces irrégulières. A cette digression on peut rattacher les inégalités de Castelnuovo de Franchis et leurs conséquences dont une démonstration géométrique est encore à chercher. — Les deux derniers chapitres reprennent et développent la classification des surfaces particulièrement de genre zéro comme elles apparaissent dans l'Enriques-Campedelli (II). A noter la réfutation d'une objection de H. Geppert (ce Zbl. 2, 410) qui proposait d'utiliser  $P_{24}$  au lieu de  $P_{12}$ . — En résumé on peut souhaiter que soit proche le jour où comme le dit Castelnuovo au terme de sa préface: „il trattato di Federigo Enriques sarà letto e meditato come il resoconto di un'esplorazione in un territorio dove molte gemme sono già state raccolte e molte altre attendono che sia degno di scoprirle“.

B. d'Orgeval (Grenoble).

Severi, Francesco: La géométrie algébrique italienne. Sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algébrique, Liège 19, 20 et 21 déc. 1949, 9—55 (1950).

I. Verf. erklärt, die „Legende“, daß die algebraische Geometrie in Italien zwar reich an Entdeckungen und wichtigen Resultaten sei, aber bis jetzt noch nicht die notwendige Strenge erreicht habe, widerlegen zu wollen. Verf. unterscheidet eine „substantielle“ und eine „formale“ Strenge; die letztere verlange in jedem einzelnen Fall eine lückenlose Deduktion von den (vielleicht nicht richtig gewählten) Axiomen und schränke die für die Entwicklung der Wissenschaft wesentliche Rolle der Induktion und Intuition so sehr ein, daß die Gefahr einer Versandung der Wissenschaft eintrete. Die etwaigen Lücken im Aufbau der algebraischen Geometrie reduzieren sich auf die Unterlassung der genauen Beweise für einige „sehr sichere“ Sätze, welche die früheren Geometer jederzeit erbringen oder nachholen zu können glaubten. Verf. führt das insbesondere am Beispiel der „zugeordneten Form“ (W.-L. Chow und B. L. van der Waerden, dies. Zbl. 16, 40) aus, die für die exakte Definition eines algebraischen Systems diene und in einem gewissen Sinn von Cayley und Bertini vorgebildet sei. Der Satz, daß alle  $V_k^\mu$  eines  $S_r$  (bei festem  $k, \mu$ ) ein algebraisches System bilden, sei bereits vorher „absolut sicher“ gewesen. Es folgt ein geometrischer Beweis des Satzes von Bézout und eine einfache Herleitung der Resultanten (vgl. hierzu das folgende Referat). — II. Verf. fordert, daß die verschiedenen Methoden, die geometrische, funktionentheoretische, topologische und abstrakt-algebraische, gemeinsam auf das Ziel hin gerichtet werden sollten, die Schwierigkeiten, die sich in einer großen Anzahl noch offener Probleme eingestellt haben, zu überwinden. Es sei zu wünschen, daß die Lösung der an der Spitze liegenden Probleme gleichmäßig mit der Vertiefung und Ausdehnung der Kritik der Grundlagen voranschreite. Verf. zählt eine Reihe vordringlicher und noch ungelöster Probleme auf: 1. Vollständiger Beweis für die Existenz einer endlichen Basis aller  $V_k$  einer  $M_r$ ; 2. Charakterisierung der Äquivalenzsysteme durch topologische und transzendente Kennzeichen; ist eine rationale Fläche dadurch gekennzeichnet, daß ihre Punkte eine Äquivalenzschar bilden? Ist ein irreduzibles Äquivalenzsystem von effektiven  $V_k$  auf einer singularitätenfreien  $M_r$  rational oder wenigstens unirational? 3. Enthält jede Familie von Kurven der Ordnung  $n$  und des Geschlechtes  $p$  in einem  $S_r$  ( $r \geq 3$ ) immer Grenzkurven, die in  $n$  Gerade zerfallen, welche paarweise je  $n + p - 1$  Punkte gemeinsam haben? 4. Gibt es zu jeder Kurve  $C$  ein irreduzibles algebraisches System  $\{C\}$  derart, daß die von den unendlich benachbarten Kurven des Systems auf  $C$  ausgeschnittene lineare Schar (charakteristische Schar) vollständig ist? 5. Beziehungen zwischen den Perioden der Integrale 1. Gattung auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit; 6. Rationale Konstruktion der Linearformen 1. Gattung auf einer Fläche; 7. Theorie der Flächen mit einer diskontinuierlichen Gruppe von birationalen Transformationen in sich; 8. Allgemeine Theorie der Korrespondenzen zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten (dies. Zbl. 21, 255); 9. Herleitung der virtuellen arithmetischen Geschlechtzahlen aus der Postulationsformel (Hilbertfunktion); der Riemann-Rochsche Satz für eine beliebige algebraische Mannigfaltigkeit  $M_r$ ; deren Irregularitäten; 10. Quasiabelsche Funktionen [Severi, Funzioni quasi abeliane, Roma 1947 und dies. Zbl. 33, 17].

Gröbner (Innsbruck).

Severi, Francesco: *Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione*. Math. Z., Berlin 52, 827—851 (1950).

Diese Arbeit bringt viel klärendes Licht in die verwirrende Vielfalt von Multiplizitätsdefinitionen, die in der algebraischen Geometrie aufgestellt worden sind. Verf. verweist zunächst auf seine zahlreichen Arbeiten in diesem Gebiet (dies. Zbl. 31, 260 und die dort angeführte Literatur), insbesondere auf seine Definition des Jahres 1933 (dies. Zbl. 7, 75). Es handelt sich um die Multiplizität eines gemeinsamen Punktes  $P$  zweier algebraischer Mannigfaltigkeiten  $W$  und  $V$  der Dimensionen  $h$  und  $k$ , die in einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $r$  ( $r \leq h + k$ ) eingebettet sind, unter der Voraussetzung, daß  $P$  einfacher Punkt von  $M$  ist oder wenigstens durch eine pseudokonforme Transformation in einen solchen verwandelt werden kann.



Verf. gibt sodann eine klare und einfache Darstellung der Definition, welche von A. Weil für diese Multiplizität in seinem Buch [Foundation of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ. Nr. 29, 1946] aufgestellt worden ist, und weist nach, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. Die Definition des Verf. ist außerdem invariant gegenüber pseudokonformen Transformationen und benützt nur die innerhalb  $M$  gegebenen Beziehungen, während diejenige von Weil zwar so gestaltet werden kann, daß sie ebenfalls invariant ist, jedoch benützt sie außerhalb  $M$  gelegene Hilfsmannigfaltigkeiten. Die Definition des Verf. ist ferner „dynamisch“, d. h. sie benützt Stetigkeitsbetrachtungen und das Kontinuitätsprinzip (Erhaltung der Anzahl), während die Weilsche Definition dem ersten Anschein nach „statisch“ ist, jedoch durch die Anwendung der „relationstreuen Spezialisierung“ von v. d. Waerden ebenfalls „dynamisch“ wird. Die Definition des Verf. läßt sich weiterhin auch auf algebroiden Mannigfaltigkeiten ausdehnen. — Im Anschluß daran entwickelt Verf. einen neuen „rein geometrischen“ Beweis des Satzes von Bézout, zunächst für  $r$  Formen gleichen Grades  $l$  in  $r + 1$  homogenen Variablen. Dazu benützt Verf. die Veronesesche Mannigfaltigkeit  $M$ , deren hyberebene Schnitte eineindeutig den Formen des Grades  $l$  entsprechen. Da die Eigenschaften der Veroneseschen Mannigfaltigkeit  $M$  wohl bekannt sind, gelingt es leicht, und zwar in geometrisch sehr einsichtiger und leicht verständlicher Weise mit Hilfe des Kontinuitätsprinzips den speziellen Bézoutschen Satz abzuleiten. Auf demselben kurzen Wege stellt Verf. mit Hilfe der Segreschen Mannigfaltigkeit die Mertenssche Resultante und insbesondere auch  $u$ -Resultante für das betrachtete Formensystem auf. — Durch einfache geometrische Überlegungen zeigt Verf., daß seine dynamische Definition dieselben Multiplizitäten liefert wie die  $u$ -Resultante; in den Fällen ferner, wo unendlich viele Lösungen existieren und die  $u$ -Resultante identisch verschwindet, kann durch geeignete Grenzübergänge aus benachbarten Lagen die „Grenzresultante“ gebildet werden, welche bei isolierten Lösungen unmittelbar die richtige Multiplizität liefert; bei „pseudo-isolierten“ (eingebetteten) Lösungen muß die „reduzierte“ Resultante gebildet werden, welche als größter gemeinsamer Teiler aller möglichen Grenzresultanten definiert ist. Zum Schluß behandelt Verf. den Fall von  $h > r$  Formen nach Art der Kroneckerschen Methode, indem mittels unbestimmter Koeffizienten aus den gegebenen Formen  $r$  Formen gebildet werden. — Nicht erwähnt wird der von Macaulay herrührende idealtheoretische Multiplizitätsbegriff, welcher nach Ansicht des Ref. den anderen Begriffen überlegen ist, weil er statisch ist (d. h. ohne Kontinuitätsprinzip auskommt) und ausnahmslos auch für  $h + k < r$  anwendbar bleibt, wo die anderen Definitionen versagen oder neu hinzugefügte Hypothesen benötigen. Gegenüber manchen angeblich rein geometrischen und ohne Hilfsmittel der Eliminationstheorie geführten Beweisen glaubt Ref. das Bedenken äußern zu müssen, daß bei der Ableitung gewisse Kenntnisse und Prinzipien vorausgesetzt werden, welche selbst rein geometrisch nicht begründet und genügend scharf kontrolliert werden können. Gröbner (Innsbruck).

Waerden, B. L. van der: Le théorème de Bézout pour les hypersurfaces. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 73—74 (1949).

Verf. entwickelt in kurzen Zügen einen Beweis für den Satz von Bézout, daß die Anzahl der Schnittpunkte von  $n$  allgemeinen Hyperflächen der Grade  $g_1, g_2, \dots, g_n$  in einem projektiven Raum  $S_n$  gleich dem Produkt ihrer Gradzahlen  $g_1 g_2 \dots g_n$  ist; das gilt auch in jedem speziellen Fall, falls nicht unendlich viele Schnittpunkte auftreten und jeder Schnittpunkt mit seiner Multiplizität gerechnet wird. Die Definition der Multiplizität des Verf. ist wohl bekannt [Math. Ann. 97, 756—774 (1927)] und stimmt im Wesen mit dem „dynamischen“ Multiplizitätsbegriff Severis (vorsteh. Referat) überein. Verf. zeigt, daß die Summe der Schnittpunkte in einem speziellen Fall gleich derjenigen im allgemeinen Fall ist; läßt man die Hyperflächen in Hyperebenen zerfallen, so ist die Anzahl leicht abzuzählen. — Auf gleiche Weise zeigt Verf. die Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes auf biprojektive Räume  $S_{m,n}$ : Die Anzahl der Schnittpunkte von  $m + n$  Hyperflächen in  $S_{m,n}$  ist gleich  $\sum f_1 f_2 \dots f_m g_1 g_2 \dots g_n$ , wo die Summe sich auf alle  $m$ -gliedrigen Kombinationen der  $m + n$  Formen erstreckt und  $f_1, \dots, f_m$  die  $x$ -Grade der  $m$  Formen einer Kombination,  $g_1, \dots, g_n$  die  $y$ -Grade der übrigen Formen bedeuten. Gröbner (Innsbruck).

Chow, Wei-Liang: Algebraic systems of positive cycles in an algebraic variety. Amer. J. Math. 72, 247—283 (1950).

Ein  $d$ -dimensionaler „Zykel“ (Divisor) auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $U$  in einem projektiven Raum  $S_m$  wird nach A. Weil [Foundation of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ. Nr. 29, 197 (1946)] als ein Element der freien abelschen Gruppe definiert, deren Erzeugende die  $d$ -dimensionalen einfachen Untermannigfaltigkeiten  $A$  von  $U$  sind; er ist also eine Summe von endlich vielen Mannigfaltigkeiten  $A$ , jede mit einer gewissen positiven



oder negativen Vielfachheit behaftet. Sind alle Vielfachheiten positiv, so heißt der Zykel „positiv“ (= „effektiv“ in der italienischen Geometrie). Auf diesen Begriff wendet Verf. die von ihm und v. d. Waerden (dies. Zbl. 16, 40) eingeführte „zugehörige Form“ an, wodurch es gelingt, diesen zunächst rein geometrisch gefaßten Begriff einer algebraischen Behandlung zu unterwerfen. Als zugehörige Form eines positiven Zyklus ist dann das Produkt der zugeordneten Formen der einzelnen Komponenten  $A$  zu verstehen, jede zu einer der Vielfachheit von  $A$  entsprechenden Potenz erhoben. Dadurch wird vor allem eine umkehrbar eindeutige Abbildung der positiven Zykeln gegebener Dimension und gegebenen Grades von  $U$  auf die Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit in einem projektiven Raum  $S_r$  vermittelt, dessen Koordinaten den Koeffizienten der zugeordneten Form entsprechen. Einem irreduziblen Teil  $V$  dieser Mannigfaltigkeit entspricht ein (irreduzibles) algebraisches System positiver Zykeln von  $U$ .  $V$  heißt die „assoziierte“ Mannigfaltigkeit dieses Systems, und die Korrespondenz  $T$  zwischen  $U$  und  $V$ , welche die Zykeln des genannten Systems den Punkten von  $V$  zuordnet, heißt die „assoziierte“ Korrespondenz. — Verf. stellt sich die Aufgabe, die besonderen Eigenschaften der assoziierten Korrespondenz  $T$  und der assoziierten Mannigfaltigkeit  $V$  im Zusammenhang mit der gegebenen Mannigfaltigkeit  $U$  zu studieren und insbesondere die Frage zu beantworten, unter welchen Voraussetzungen über  $U$  und  $T$  die assoziierte Mannigfaltigkeit  $V$  singularitätenfrei oder wenigstens in einem gegebenen Punkt nicht singular ist. Mit ziemlich schwierigen Überlegungen gewinnt Verf. den Satz: Es seien  $U$  und  $V$  absolut irreduzible Mannigfaltigkeiten,  $(y)$  ein allgemeiner Punkt von  $V$ ,  $|G(y)|$  die entsprechende Involution positiver Zykeln auf  $V$ ,  $T$  die assoziierte Korrespondenz zwischen  $U$  und  $V$ ; ferner bedeute  $(\eta)$  irgendeinen Punkt auf  $V$ ,  $G'$  eine einfache Komponente von  $G(\eta)$ . Ist dann  $T$  regulär auf  $G'$ , so sind  $U$  und die Produktmannigfaltigkeit  $W = V \times G'$  analytisch äquivalent in ihren Teilmannigfaltigkeiten  $G'$  und  $\eta \times G'$ . — Daraus folgt insbesondere, daß  $G'$  dann und nur dann einfach in  $U$  liegt, wenn  $(\eta)$  einfach in  $V$  ist. Dieser Satz, der auch für relativ irreduzible Mannigfaltigkeiten formuliert wird, erlaubt eine wichtige Anwendung auf die Jacobische Mannigfaltigkeit einer algebraischen Kurve, über die Verf. eine neue Arbeit ankündigt. Es folgt nämlich, daß die durch die zugehörige Form gewonnene assoziierte Mannigfaltigkeit des Systems der linearen Scharen gegebener Ordnung  $n > 2g - 2$  einer algebraischen Kurve vom Geschlecht  $g$  immer bereits eine Jacobische Mannigfaltigkeit ist. — In einem Anhang entwickelt Verf. im Anschluß an Krull (dies. Zbl. 19, 289) und Chevalley [Ann. Math., Princeton, II. S. 44, 690—708 (1943); Trans. Amer. Math. Soc. 55, 68—84 (1944) und 57, 1—85 (1945)] mehrere Sätze über verallgemeinerte Stellenringe, die er für die Ableitung des Hauptsatzes benötigt.

Gröbner (Innsbruck).

**Marchionna, Ermanno:** Un complemento del teorema dell'  $Af + B\varphi$ . Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 368—370 (1949).

Le théorème de Nöther s'étend à toute courbe d'ordre  $g$ ; passant  $r$  fois par un point  $P$  commun à deux courbes  $f$  et  $\varphi$  d'ordres respectifs  $m$  et  $n$  passant  $i$  et  $l$  fois en  $P$  pourvu que:  $g - r < m + n - (i + l)$ . La démonstration s'obtient immédiatement en ajoutant à la courbe  $s$  droites passant par  $P$  en sorte que l'on obtienne une courbe pour laquelle  $i + 1 - r - s - 1 < 1$ , à laquelle on applique le théorème classique de l' $Af + B\varphi$ .

B. d'Orgeval (Grenoble).

**Villa, Mario:** Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 3, 201—204 (1948).

L'autore dà alcune condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la curva Jacobiana d'una rete affinché la rete sia omaloidica. M. Piazzolla Beloch.

**Todd, J. A.:** On the quartic combinant of a pencil of quadric surfaces. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 189—193 (1949).

Es wird hier die geometrische Bedeutung einer Kovariante 4. Grades eines Quadrikenbüschels, die Verf. vom algebraischen Standpunkt aus schon betrachtet hatte (dies. Zbl. 29, 162), angegeben. Zu diesem Zweck betrachtet Verf. auf einer kubischen Raumkurve  $\Gamma$  eine besondere Linearschar  $g_4^1$ , die durch eine Gruppe  $G$  von vier Punkten von  $\Gamma$  zusammen mit ihrer Hesseschen Gruppe  $H$  definiert wird. Die Polargruppen eines festen Punktes  $P$  von  $\Gamma$  in bezug auf die Gruppen der  $g_4^1$  bilden eine  $g_3^1$  und werden auf  $\Gamma$  durch die Ebenen eines Büschels ausgeschnitten; auch die Polargruppen der verschiedenen Punkte  $P$  von  $\Gamma$  in bezug auf eine feste Gruppe  $G$  der  $g_4^1$  werden auf  $\Gamma$  durch die Ebenen eines Büschels ausgeschnitten; die Achsen der beiden Büschel sind, bei veränderlichen  $P$  und  $G$ , die zwei Erzeugendenscharen einer Quadrik  $K'$ . Wegen der Besonderheit der  $g_4^1$  fällt  $K'$  mit derjenigen Quadrik  $K$  zusammen, die von den Flächen aller Tetraeder  $G$  umhüllt wird. Der

Beweis dieses Satzes wird analytisch entwickelt. Wenn man nun in den beiden Gleichungen des ersten der betrachteten Ebenenbüschel und der Quadrik  $K \equiv K'$  die Veränderlichen  $y_i$  durch  $x_i^2$  ersetzt, so erhält man ein Quadrikenbüschel und seine gesuchte Kovariante 4. Grades. Die Konstruktion wird schließlich im Raume  $S_9$  der  $\infty^9$  Enveloppenquadriken interpretiert. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Room, T. G.: Self-transformations of determinantal quartic surfaces. I, II, III, IV.** Proc. London math. Soc., II. S. 51, 348—361, 362—382, 383—387, 388—400 (1950).

Eine quaternäre trilineare Form  $F = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_{ijk} x_i y_j z_k$ , in der die homogenen Punktkoordinaten  $x, y$  und  $z$  aus drei linearen  $R_3$  miteinander verbunden sind, bestimmt in diesen drei Räumen je eine Fläche vierter Ordnung  $\Pi_x, \Pi_y$  bzw.  $\Pi_z$ , gegeben durch die Gleichungen

$$\text{Det}_{jk} \left| \sum_{\lambda} a_{\lambda jk} x_{\lambda} \right| = 0, \quad \text{Det}_{ik} \left| \sum_{\mu} a_{i\mu k} y_{\mu} \right| = 0, \quad \text{Det}_{ij} \left| \sum_{\nu} a_{i j \nu} z_{\nu} \right| = 0.$$

Durch  $F$  wird eine (3,3)-Cremonatransformation je zweier dieser Flächen  $\Pi$  aufeinander vermittelt. Ist nämlich  $p$  ein Punkt auf  $\Pi_x$ , so gibt es auf  $\Pi_y$  eindeutig einen Punkt  $q$  als Schnittpunkt der vier Ebenen  $\sum_{\lambda=1}^4 \sum_{\mu=1}^4 a_{\lambda\mu k} p_{\lambda} q_{\mu} = 0$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Die Transformation  $p \rightarrow q$  wird durch  $q = \omega_{yx} p$  angedeutet. Analog ist  $r = \omega_{zy} q = \omega_{zy} \omega_{yx} p$ . Die Transformation  $p^* = \Omega_x p = \omega_{xz} \omega_{zy} \omega_{yx} p$  ist dann eine Abbildung der Fläche  $\Pi_x$  auf sich selbst. — Sind  $f_0, g_0$  und  $h_0$  ebene Schnitte von  $\Pi_x, \Pi_y$  bzw.  $\Pi_z$ , so geben bei den Abbildungen  $\omega$  ihre Bilder Schursche Kurven 6. Ordnung  $C_6$ . Wenn  $f'_1 = \omega_{xz} h_0$  und  $f''_1 = \omega_{xy} g_0$  zwei solche  $C_6$  auf  $\Pi_x$  sind, dann liegen beide auf einer kubischen Fläche  $\Phi$  und bilden den vollständigen Schnitt  $(\Pi_x, \Phi)$ . Von dieser Tatsache ausgehend, werden Kurvenfamilien untersucht, die sich durch wiederholte Abbildungen  $\omega$  und  $\Omega$  einstellen. Hierbei spielt der Begriff von „Kurven-Folgen“ eine wichtige Rolle. Für die Ordnungen der Kurven einer Folge werden Differenzengleichungen aufgestellt und gelöst. Von Kurvenfamilien wird im Besonderen die der Reyeschen Kurven zehnter Ordnung vom Geschlecht elf betrachtet. — Die weiteren Mitteilungen II, III und IV behandeln die verschiedenen Möglichkeiten, die sich einstellen, wenn auf  $\Pi_x$  wenigstens eine Gerade  $f$  existiert. Hier kann  $f$  entweder ein Bestandteil einer der  $\infty^3$  auf  $\Pi_x$  gelegenen Schurschen  $C_6$  sein oder aber, wenn dies nicht der Fall ist, die  $f'_1$  oder  $f''_1$  in 0, 1, 2 oder 3 Punkten treffen. Die sich so ergebenden Möglichkeiten untersucht Verf. durch Spezialisierung der Koeffizienten  $a_{ijk}$  von  $F$ . Hierbei wird auf Ergebnisse von Baker (Principles of geometry, Cambridge 1939) und auf eigene Resultate [Room, Geometry of determinantal loci, Cambridge 1939; dies. Zbl. 20, 54] zurück gegriffen. Daß auf einer  $\Pi_x$  höchstens 64 Geraden liegen können, hat B. Segre bewiesen [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 14, 86—96 (1943) und Proc. Cambridge phil. Soc. 40; 121—145 (1944)].

*Weitzenböck (Overveen).*

**Val, Patrick Du: Removal of singular points from an algebraic surface.** Univ. Istanbul. Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la pose de la première pierre des nouv. Inst. 21—25 (1948).

L'A. si propone di dare una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema che ogni superficie algebrica può essere trasformata birazionalmente in una priva di punti multipli. A questo scopo egli accoglie: I. il risultato di G. Albanese [Rend. Circ. mat. Palermo 48, 321—332 (1924)], secondo il quale ogni superficie si può trasformare in una dotata di punti singolari al più doppi; II. il risultato di F. Severi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. 23, 527—539 (1914)] che ogni superficie priva di punti multipli propri si può trasformare in una superficie senza singolarità. Ammessi questi due risultati, tutto si riduce a dimostrare che una superficie dotata al più di punti doppi può essere trasformata in una priva

di punti singolari propri. A questo scopo l'A. si riduce, con un seguito di convenienti proiezioni, ad una superficie dello spazio ordinario, che possiede solo punti multipli propri doppi; proiettando poi in modo opportuno sopra un piano multiplo, le singolarità proprie si riducono a punti singolari della curva di diramazione; tali punti singolari vengono rimossi con un seguito di risoluzioni quadratiche, ottenendo alla fine una superficie multipla priva di punti singolari propri; l'A. costruisce infine una conveniente trasformata  $F'$  della superficie iniziale, della quale la superficie multipla ottenuta è una proiezione; dalla non esistenza di singolarità proprie della superficie multipla si deduce la non esistenza di singolarità proprie della  $F'$ .

*Conforto* (Roma).

**Godeaux, Lucien:** Sur une surface canonique d'irrégularité 1. Bull. Sci. math., II. S. 71, 7—16 (1947).

Dans cette note l'A. construit une surface d'ordre 24, de l'espace ordinaire, de genres  $p_g = 4$ ,  $p_a = 3$ ,  $p^{(1)} = 25$ , dont les sections planes forment le système canonique. La surface est d'irrégularité  $q = p_g - p_a = 1$  et contient un faisceau elliptique de courbes d'ordre 6 et de genre 4. *M. Piazzolla Beloch* (Ferrara).

**Godeaux, Lucien:** Surfaces dont le système canonique appartient à une involution. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 7—9 (1947).

Dans cette note l'A. établit les propositions suivantes: La surface du huitième ordre, de genres  $p_a = p_g = 5$ ,  $p^{(1)} = 10$ , possédant une droite quadruple, quatre droites doubles situées dans un plan, les cinq droites multiples concourant en un même point, quintuple pour la surface, a le système canonique appartenant à une involution d'ordre trois; ce système est découpé par les cônes du quatrième ordre passant trois fois par la droite quadruple et une fois par les droites doubles de la surface. — La surface du septième ordre, de genre  $p_a = p_g = 4$ ,  $p^{(1)} = 7$ , possédant une droite triple et trois droites doubles situées dans un plan, les quatre droites multiples concourant en un même point, quadruple pour la surface, a le système canonique appartenant à une involution d'ordre trois; ce système est découpé par les cônes cubiques passant doublement par la droite triple et simplement par les trois droites doubles de la surface. *M. Piazzolla Beloch* (Ferrara).

**Godeaux, Lucien:** Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 56—61 (1948).

L'A. montre que les résultats obtenus dans ses études sur la structure des points unis d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique  $F$  se présentent effectivement, en construisant quelque exemple. *M. Piazzolla Beloch*.

**Godeaux, Lucien:** Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples. I. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 15—30 (1949).

L'A. considère une surface algébrique  $F$  contenant une involution  $I_p$  d'ordre premier  $p = 2v + 1$ , n'ayant qu'un nombre fini de points unis, et soit  $A$  un point uni non parfait. On peut former sur  $F$  un système linéaire  $|C|$  contenant  $p$  systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un de ces systèmes  $|C_0|$  est dépourvu de points base; parmi les autres il en est deux  $|C_1|$ ,  $|C_2|$  dont  $A$  est un point simple, les tangentes à ces courbes en  $A$  étant fixes et distinctes. En appelant  $C'_0$  les courbes  $C$  passant par  $A$ , elles ont en  $A$  une certaine multiplicité  $\lambda_1 + \mu_1$ ,  $\lambda_1$  tangentes en  $A$  étant confondues avec la tangente en ce point aux courbes  $C_1$ , les  $\mu_1$  autres avec la tangente aux courbes  $C_2$ ; les nombres  $\lambda_1, \mu_1$  satisfont à la congruence  $\lambda + \alpha\mu \equiv 0 \pmod{p}$ , et  $\lambda_1 + \mu_1$  est minimum. — Si  $\Phi$  est une surface image de l'involution dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes  $C_0$  et  $A'$  le point de diramation homologue du point uni  $A$ ;  $A'$  est un point multiple de la surface  $\Phi$ , et c'est la structure de ce point multiple que l'A. étudie dans cette Note. Il existe un entier  $\beta$  compris entre 1 et  $p$  tel que  $\alpha\beta$  soit congru à 1, mod  $p$ . On peut supposer sans restriction  $\alpha < \beta$  et on a alors  $\lambda_1 + \alpha\mu = p$ ,  $\mu_1 + \beta\lambda_1 = kp$ . — L'A. démontre qu'il existe un cône d'ordre  $\mu_1$  tangent à la surface  $\Phi$  au point  $A'$ , et de plus, si



$k = 1$  il existe un cône d'ordre  $\lambda_1$  tangent à  $\Phi$  au même point et ces deux cônes forment le cône tangent à la surface en ce point. (Si  $k > 1$ , le cône tangent à  $\Phi$  en  $A'$  se compose de plus de deux cônes.) — Dans cette note l'A. s'occupe du cas  $k = 1$ .

*M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

**Godeaux, Lucien:** Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples. II. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 270—284 (1949).

Dans cette deuxième note l'A. étudie l'hypothèse  $k > 1$  avec quelque restriction, et en donne quelques exemples.

*M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

**Godeaux, Lucien:** Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples. III. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 285—292 (1949).

Dans cette troisième Note l'A. considère le cas particulier  $p = 61$ , en supposant que pour le point uni  $A$  que l'on considère, soit  $\alpha = 14$ . Il démontre que, le point de diramation  $A'$  est sextuple pour la surface  $\Phi$ . Le cône tangent en ce point se décompose en deux plans  $\sigma, \tau$  et en un cône rationnel du quatrième ordre  $\gamma$ . Le plan  $\tau$  rencontre le cône  $\gamma$  suivant une droite portant un point double conique infiniment voisin de  $A'$ . Les deux plans se rencontrent suivant une droite portant également un point double conique infiniment voisin de  $A'$ . Le plan  $\sigma$ , et le cône  $\gamma$  ne se rencontrent pas.

*M. Piazzolla Beloch (Ferrara).*

**Godeaux, Lucien:** Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples. IV. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 532—541 (1949).

Dans cette note l'A. en généralisant un résultat précédent démontre que, si une surface  $\Phi$ , image d'une involution cyclique d'ordre premier  $p$  appartenant à une surface algébrique, possède un point de diramation dont le cône tangent se compose de deux plans  $\sigma, \tau$  et d'un cône d'ordre  $\mu_1 > 1$ ,  $\gamma$ ; si  $\tau$  rencontre  $\sigma$  et  $\gamma$  chacun suivant une droite, tandis que  $\sigma$  et  $\gamma$  ne se rencontrent pas, si enfin la surface possède un point double conique infiniment voisin du point de diramation sur la droite commune à  $\tau, \gamma$ , alors: il existe un point double conique infiniment voisin du point de diramation sur la droite commune aux plans  $\sigma, \tau$ .

*M. Piazzolla Beloch.*

**Predonzan, Arno:** Intorno agli  $S_k$  giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 5, 238—242 (1948).

Im Raume  $S_r$  ( $x_0, x_1, \dots, x_r$ ) sei  $V_s^n$  eine Mannigfaltigkeit, die als vollständiger Schnitt von  $m = r - s$  Formen  $f_i^{n_i}(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$  entsteht ( $n = \prod_{i=1}^m n_i$ ). Verf. beweist, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die allgemeine  $V_s^n$  mindestens einen linearen Raum  $S_k$  ( $0 \leq k < s$ ) enthalte, in der Ungleichung

$$(r - k)(k + 1) - \sum_{i=1}^m \binom{n_i + k}{k} \geq 0$$

besteht; ein Ausnahmefall ist nur für  $n_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ),  $n_m = 2$ ,  $k \geq 2$  vorhanden, wo die letztgenannte Ungleichung durch  $r - 2k - m \geq 0$  ersetzt werden darf. Die Beweismethode stützt sich auf das Prinzip der Konstantenabzählung.

*Conforto (Rom).*

**Jongmans, F.:** Contribution à la théorie des variétés algébriques. Mém. Soc. Sci. Liège, IV. S. 7, 367—468 (1947).

In dieser inhaltreichen Arbeit stellt Verf. sich die Aufgabe, mit den bekannten geometrischen Methoden die Beziehungen zwischen den birationalen Invarianten und Kovarianten gewisser Klassen algebraischer Flächen schärfer zu bestimmen. In 4 Kapiteln werden folgende Probleme behandelt: I. Für die Anzahl  $M$  der Moduln einer Familie algebraischer Flächen mit den Geschlechtszahlen  $p_a, p_g, p^{(1)}$  wurden von Enriques und B. Segre (dies. Zbl. 9, 178) untere und obere Schranken angegeben (vgl. auch Zariski, dies. Zbl. 10, 371). Mit geringen Abänderungen des Beweises von B. Segre leitet Verf. die engeren oberen Schranken ab:

$$M \leq 9p_a - p_g - p^{(1)} + 3(2\pi - 2 - n) + 12$$

für  $p_g > 0$  und  $2M \leq -p^{(1)} + 12\pi - 3n - 1$  für  $p_g = p_a = 0$ ; hier bedeuten  $\pi$  und  $n$  das Geschlecht und den Grad eines regulären irreduziblen Systems  $|C|$  von wenigstens  $\infty^3$  Kurven,

welche das kanonische System umfassen und keine Basispunkte besitzen. Es muß noch die Voraussetzung erfüllt sein, daß die Flächen nicht unendlich viele birationale Transformationen in sich gestatten. Insbesondere gelten bei  $p^{(1)} > 1$  und  $P_{12} > 1$  die schärferen Ungleichungen:  $M \leq 9p_a - p_g + 5p^{(1)} + 6$  für  $p_g \geq 2$  und  $M \leq 9p_a - p_g + 8p^{(1)} + 3$  für  $p_g = 1$ . Bei regulären Flächen vom Geschlecht 0 ( $p_g = p_a = 0$ ) gilt:  $2M \leq 23p^{(1)} - 13$ , wenn das Doppelgeschlecht  $P_2 \geq 4$  ist,  $M \leq 22p^{(1)} - 17$ , wenn  $2 \leq P_2 \leq 4$ , und  $2M \leq 71p^{(1)} - 61$ , wenn  $P_2 = 1$  ist. — II. Durch Auswertung der Formeln von Castelnuovo (Memorie scelte, Bologna 1937, 3, Abh. VIII, Anhang) auf die minimalen Vielfachen der charakteristischen Schar von  $|C|$  erhält Verf. untere Schranken für die Dimension der minimalen Vielfachen  $k|C|$ . In Verbindung mit dem Riemann-Rochschen Satz folgt für eine Fläche  $F$  der Ordnung  $n$  im  $S_r$ , die höchstens uneigentliche isolierte vielfache Punkte besitzt und deren hyper-ebene Schnitte  $|C|$  das Geschlecht  $\pi$  haben:  $p_a \geq -2 \binom{\chi + 1}{3} (r - 2) + \binom{\chi}{2} (n - 1) - \Omega(\Pi - \pi)$ .

Hier bedeuten  $\chi$  die größte ganze Zahl, die kleiner als  $(n - 1)/(r - 2)$  ist,  $\Pi = \chi(n - 1) - \binom{\chi + 1}{2} (r - 2) \geq \pi$  und  $\Omega$  die kleinere der beiden Zahlen  $n - 3$  und  $\chi + \Pi - \pi$ . Diese Formel vereinfacht sich, wenn  $|C|$  maximales Geschlecht hinsichtlich  $S_r$  besitzt ( $\pi = \Pi$ ). Für das geometrische Geschlecht findet Verf. mit Benützung des Satzes von Clifford die obere Schranke:  $p_g \leq \theta \pi - \theta(\theta + 1)n/4 - \alpha$ , wo  $n$  und  $\pi$  Grad und Geschlecht eines mindestens zweidimensionalen irreduziblen linearen Systems  $|C|$  bedeuten, welche der Beschränkung  $2\pi - 2 - n \geq 0$  unterliegen,  $\theta = [(2\pi - 2)/n]$ ,  $\alpha = \theta$  falls  $n$  gerade,  $\alpha = (3\theta - 1)/4$  falls  $n$  ungerade,  $\alpha = 0$  falls die Kurven  $C$  hyperelliptisch sind; wenn  $(2\pi - 2)/n$  ganz ist, kann  $\alpha = \theta - 1$  bei geradem  $n$ ,  $\alpha = (3\theta - 4)/4$  bei ungeradem  $n$  gesetzt werden. Die Formeln gelten auch sinngemäß mit den virtuellen Charakteren. Durch geeignete Abschätzungen von  $\theta$  folgen die einfacheren Formeln  $p_g \leq \pi(2\pi - n)/2n + n/16$  und  $p_g \leq (\pi - 1)(2\pi - n - 1)/2n + (n - 1)^2/16n + 1$ , falls die Kurven  $C$  auch hyperelliptisch sein können. Mit Hilfe der von Comessatti [Atti Ist. Veneto 74, 1685—1709 (1914/15)] gewonnenen Abschätzungen für die Dimension einer einfachen Schar  $g_m^n$ , welche schärfer sind als der Cliffordsche Satz und auf die von den Systemen  $|C|$  auf  $C$  ausgeschnittenen Scharen  $g_{jn}$  angewandt werden, folgt:

$$p_g \leq \theta(\pi + 1) - \theta(\theta + 1)n/2 + \sum M_j \quad \text{mit} \quad \theta = [(2\pi - 2)/n], \\ q_j = [\theta/j + 1] \quad (j = 1, 2, \dots, \theta), \quad M_j = [2(jn - 1)/(q_j + 1) - 2\pi/q_j(q_j + 1)].$$

Aus der oberen Schranke für  $p_g$  und der unteren für  $p_a$  kann man eine obere Schranke für die Irregularität  $p_g - p_a$  der Fläche  $F$  ableiten. Die Formeln können auch dazu ausgewertet werden, um den Spezialitätsindex von linearen Kurvensystemen  $|C|$  abzuschätzen. Verf. gibt noch eine neue Ableitung und Verschärfung der Abschätzungsformeln von Comessatti. — III. Die Anwendung der in I und II abgeleiteten Formeln auf das reine kanonische System  $|K|$ , falls dieses irreduzibel, einfach und frei von Basispunkten ist, liefert  $p^{(1)} \geq 4p_a - p_a - 6$ , welche Formel bei regulären Flächen in die bekannte von Castelnuovo  $p^{(1)} \geq 4p_g - 6$  übergeht. Sie kann noch auf verschiedene Weisen spezialisiert werden, z. B.  $13p^{(1)} \geq 48p_g - 155$ , falls auf  $F$  ein semikanonisches System existiert. Ähnliche Formeln leitet Verf. für algebraische Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 ab, womit die Resultate von Rosenblatt und B. Segre (dies. Zbl. 9, 371) verbessert werden. — IV. Hier untersucht Verf. die Frage, wann die Formen eines bestimmten Grades  $l$  des Raumes  $S_r$  auf einer in diesem Raum eingebetteten algebraischen Mannigfaltigkeit komplette Schnittsysteme ausschneiden; so sollen z. B. unter sehr geringfügigen Einschränkungen die adjungierten Formen eines Grades  $l \geq n - r$  auf einer irrationalen Kurve der Ordnung  $n$  des  $S_r$  immer eine nicht-speziale Vollschar ausschneiden. Die Klasse der Kurven, für welche das richtig ist, scheint aber tatsächlich viel stärker eingeschränkt zu sein, wie die Untersuchungen von P. Dubreil über Kurven „de première espèce“ (dies. Zbl. 11, 268; 14, 391; 30, 295) und des Ref. über „perfekte“ Kurven (dies. Zbl. 31, 201; 33, 127) ergeben. Da die in diesem Kapitel aufgestellten Sätze in den vorausgehenden benützt wurden, dürften auch jene Ergebnisse wohl noch gewissen Einschränkungen unterworfen sein. Gröbner (Innsbruck).

Jongmans, F.: Les séries abéliennes sur une courbe algébrique. Acad. Bel-gique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 892—905 (1948).

Jongmans, F.: Quelques propriétés nouvelles des séries abéliennes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. S. 35, 245—257 (1949).

Sei  $C_p$  eine algebraische Kurve des Geschlechtes  $p$  ( $\geq 2$ ), mit einem regulären System  $u_1, u_2, \dots, u_q$  von  $q$  ( $0 < q < p$ ) reduziblen Integralen erster Gattung. Verf. vertieft die, schon von F. Severi [Atti Accad. Italia, Mem. 12, 337—430 (1941); dies. Zbl. 26, 71] angefangene Untersuchung der vollständigen Abelschen Scharen  $\gamma_n$  der Ordnung  $n$  und der Gattung  $q$ , d. h. der (algebraischen) Mannigfaltigkeiten, die aus allen Gruppen von  $n$  Punkten der  $C_p$  bestehen, die einer Bedin-

gung  $\sum_{i=1}^n u_j(P_i) \equiv c_j \pmod{\text{Perioden}}$ , wo die  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) konstant sind, genügen. Jede  $\gamma_n$  ist eine (algebraische) Mannigfaltigkeit von vollständigen Linearscharen, da offenbar die Eigenschaft besteht, daß mit einer Punktgruppe jede dieser Punktgruppe linear äquivalente Punktgruppe der  $\gamma_n$  angehört. Verf. beweist, daß die  $\gamma_n$  in „eigentliche“ und „uneigentliche“ zerfallen, je nachdem  $d = p - q$  oder  $d < p - q$  ist, wo  $d$  die Dimension der  $\gamma_n$  als Mannigfaltigkeit von vollständigen Linearscharen bedeutet. Im Falle  $d = p - q$  entsprechen die vollständigen Linearscharen, die die  $\gamma_n$  bilden, eineindeutig den Punkten der  $(p - q)$ -dimensionalen Abelschen Mannigfaltigkeit, die einem System von  $p - q$  reduzierten Integralen entspricht, das komplementär zum System der  $u_1, u_2, \dots, u_q$  ist; im Falle  $d < p - q$  darf  $n < p$  sein, und es ist dann auch  $d \geq n - q$  und  $d \leq n - 1$ . Die allgemeine Abelsche Schar  $\gamma_n$  ist, im Falle  $n < p$ , immer uneigentlich, da für sie  $d = n - q$  ist. Verf. zeigt aber an Beispielen, daß auch  $\gamma_n$  ( $n < p$ ) existieren können, mit  $d > n - q$  und auch mit  $d = p - q$ . Verf. betrachtet dann die „speziellen“  $\gamma_n$ , die eigentlich sind und aus speziellen Linearscharen bestehen. Solche  $\gamma_n$  mit  $n \geq p$  existieren dann und nur dann, wenn eigentliche Abelsche Scharen einer Ordnung  $< p - 1$  existieren. Ferner verallgemeinert Verf. den Riemann-Rochschen Satz für die (jetzt als Mannigfaltigkeiten von Punktgruppen betrachteten) vollständigen  $\gamma_n^*$  vom Falle der eigentlichen  $\gamma_n$  (F. Severi) auf den Fall der uneigentlichen. Es folgen einige Anwendungen. In bezug auf die eigentlichen und vollständigen  $\gamma_n$ , bei denen die allgemeine Linearschar  $g_n^r$  der  $\gamma_n$  frei von Fixpunkten und zusammengesetzt mit einer Involution  $j_m$  ist, zeigt Verf., daß sie in zwei Gattungen zerfallen: a)  $j_m$  ist linear und in einer eigentlichen Abelschen Schar der Gattung  $q$  veränderlich; die Existenz solcher  $\gamma_n$  wird nicht bewiesen; tatsächliche Beispiele können nur mit  $p - q + 3 \leq m \leq 1 + p/r$  und  $p \geq 8$  vorhanden sein; b)  $j_m$  bleibt fest und hat das Geschlecht  $\geq p - q$ : es ist  $m \leq \alpha$ , wo  $\alpha$  die kleinste der zwei Zahlen  $(p - 1)(p - q - 1)$  und  $n(p - q + 1)$  ist. Ist  $g_N^R$  die allgemeine vollständige Linearschar in einer speziellen  $\gamma_N$ , so gilt  $2R \leq N - (p - q) - 1$ : eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Clifford. Zuletzt werden die speziellen Abelschen Scharen untersucht, wo die letzte Relation mit dem Gleichheitszeichen gilt; es existieren a priori zwei Typen solcher Scharen; für einen dieser Typen ist die Existenz noch nicht bewiesen.

Conforto (Rom).

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Aleksandrov, A. D.: *Geometrie und Topologie in der Sowjet-Union. II.* Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 5 (21), 9—92 (1947) [Russisch].

[Pour I. voir Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 4 (20) (1947).] § 12. Géométrie moderne. Désireux de situer les travaux des savants soviétiques par rapport à l'œuvre totale des géomètres contemporains, l'A. brosse, dans ce paragraphe introductif, un tableau d'ensemble de la Géométrie Moderne. Pour chaque branche de cette discipline, il s'efforce de résumer son objet propre, de donner une idée des méthodes particulières à chacune d'elles. Il aboutit à la classification suivante: 1. Géométrie des ensembles: théorie de la contingence, théorie des corps convexes, géométrie infinitésimale directe. 2. Géométries différentielles et analytiques, caractérisées par la notion de coordonnées et l'emploi systématique de l'appareil algébrique et analytique; géométries algébriques de Klein, de Riemann, de Cartan, de Finsler (avec ses applications au calcul des variations), de Rachevsky (Raševskij) (dite encore géométrie polymétrique). L'A. insiste sur l'importance des notions d'objet géométrique et du champ attaché à cet objet, introduites principalement par Wagner (Vagner) et appelées, selon l'A. à jouer un grand rôle dans le développement futur des géométries. 3. Géométrie globale, caractérisée par le recours constant à la topologie. Dans cet ordre d'idées, citons la théorie métrique globale des multiplicités dont la théorie des corps convexes, due à l'A., paraît être une illustration spécialement brillante. — § 13. La Géométrie en URSS. 1. L'école de Géométrie classique de Moscou [Finikoff, Buscheguenne (Bjužgens), Masloff, Bachvaloff, Rossinsky] s'est consacrée à l'étude de la déformation des surfaces et des congruences, aux géométries projectives. On trouvera l'analyse de ses travaux dans le Recueil „Matematika“, t. 15 (1932). 2. L'Ecole de Géométrie riemannienne et d'analyse tensorielle groupe, autour du Séminaire, fondé à Moscou par Kagan en 1927,



des savants de plusieurs centres scientifiques de l'URSS et même de l'étranger. Les „Publications“ du Séminaire forment un ouvrage de cinq volumes (Kagan, Gourevitch (Gurevič), Doubnoff (Dubnov), Efimoff, G. Lapteff, Lopschitz (Lopšic), Norden, Rachevsky, de Moscou; Schirokoff (Širokov) et B. Lapteff, de Kazan; Wagner, de Saratoff). Un colloque international eut lieu à Moscou en 1936. Pour l'analyse des travaux antérieurs à 1932, on se reportera à l'article précité de „Matematika“: il suffira de citer les recherches de Kagan, et de ses élèves, consacrées aux espaces riemanniens „subprojectifs“ (définis par Kagan) et leurs prolongements contemporains (Norden, 1946). D'autres travaux de cette école seront analysés au cours des §§ 20—21—22. Doubnoff a construit une théorie tensorielle des réseaux de courbes tracées sur une surface. — 3. L'Ecole de Géométrie Globale, dont les travaux sont caractérisés par l'emploi systématique de la topologie et de la géométrie directe. A Moscou citons Urysohn, Lusternik (Ljusternik), Schnirelmann (Šnirelman) (problème des 3 géodesiques fermées de Poincaré). A Leningrad, B. Delaunay (Delone) a résolu divers problèmes fondamentaux de géométrie cristalline; A. Alexandroff, Cohn-Vossen, Libermann, Olovianichnikoff (Olovjanichnikov) ont étudié la déformation globale des surfaces (cf. les §§ 16—19 ci après). Kolmogoroff et ses élèves ont étudié la notion de mesure dans l'espace à  $n$  dimensions (géométrie des ensembles), la théorie de la contingence; enfin signalons les recherches de ce groupe de savants sur les fondaments de la Géométrie. Petrovsky et Nicoladze (Nikoladze) se consacrent à la géométrie algébrique. — § 14. Des applications de la Géométrie. L'analyse fonctionnelle est une sorte de Géométrie généralisée, la fonction étant pour l'espace fonctionnel l'analogue du point pour l'espace ordinaire. L'introduction des méthodes géométriques dans la théorie des nombres (et plus spécialement dans l'étude des formes quadratiques) a été réalisée par Minkowski, Venkoff, Zytomirski (Žitomirskij), Korkine, Zolotareff, Gorchkoff (Gorškov). Parmi les résultats acquis, citons la solution géométrique, due à Delaunay, du problème: trouver la forme définie positive à quatre variables (prenant des valeurs entières) à discriminant donné, admettant un minimum maximum positif; problème de la réduction des formes et étude de leur groupe d'automorphisme (Venkoff). Delaunay donne une forme géométrique à la théorie de Galois et ses travaux semblent constituer un des plus beaux titres de gloire des mathématiques soviétiques contemporaines. — En analyse, le point de vue géométrique a permis de géométriser les problèmes variationnels liés aux espaces de Finsler (Wagner), de développer la théorie de la meilleure approximation par polynômes, en partant de la théorie des corps convexes, (Schnirelmann), d'aboutir à divers théorèmes d'unicité dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (Bernstein). Application des espaces de Riemann à la Mécanique (Wagner), à la physiologie (théorie de la perception des couleurs), à la relativité [Vock (Fok), problème des  $n$  corps], Friedmann (Fridman) (cosmogonie relativiste) Mandel (théorie du champ électromagnétique à cinq dimensions); travaux de Vock sur l'interprétation des équations quantiques de l'électron dans une géométrie à cinq dimensions et sur la géométrisation des équations de Dirac (ces travaux ont fait l'objet d'appréciations élogieuses de Schrödinger). — § 15. Déformation locale des surfaces. Soient deux surfaces isométriques  $S, S'$  à courbure gaussienne  $K > 0$  (ou à la rigueur nulle,  $K \equiv 0$ ). D'après le résultat classique de E. Levi (1908), on peut toujours, par déformation continue, réduire l'un à l'autre deux morceaux homologues, suffisamment petits, de  $S$  et  $S'$ . Selon une opinion répandue, la condition  $K > 0$  devait être superflue; or N. Efimoff [Doklady Akad. Nauk SSSR 27, fasc. 4 (1910) et Mat. Sbornik, n. S. 19 (61), 461—488 (1946)] établit l'existence de surfaces analytiques n'admettant aucune déformation analytique continue du voisinage (si petit soit-il) de leur point parabolique. — La théorie de la déformation des surfaces à réseau conjugué persistant, créée par Peterson (1886) a été développée par Finikoff et Buscheguennce, auquel on doit la formation du système différentiel que vérifie la surface  $S$ , d'élément  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  donné, susceptible de déformation de Peterson. La question de savoir si le système en jeu admet une solution dans le cas général est restée en suspens jusqu'en 1938 (bien que l'examen des cas particuliers incitât à répondre par l'affirmative). N. Lusin (Luzin) (Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Sci. tech. 1939) prouve le résultat suivant: 1. Au couple de fonctions  $E, F$  choisis arbitrairement, on peut toujours adjoindre une fonction  $G$  telle que le problème posé n'admette pas de solution; à noter que  $G$  peut être choisie avec un grand degré d'arbitraire. 2. Les surfaces isométriques à  $S$ , admettant une déformation de Peterson forment une famille dépendant de 13 paramètres au plus. — § 16. Déformation globale des surfaces. L'A. a étudié [Mat. Sbornik, n. S. 4, 69—77 (1938)] les surfaces  $S_T$ , c'est-à-dire, assez régulières, homéomorphes à la sphère, munies d'un nombre quelconque d'anses; les courbes, le long desquelles la courbure gaussienne  $K$  de  $S_T$  est nulle, sont régulières et fractionnent  $S_T$  en domaines  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$  sur lesquels  $K$  est  $> 0$  ou  $< 0$ ; la courbure totale de  $S_T$  est égale à  $4\pi$ . Dans ces conditions: 1) Chaque morceau  $\Delta^+$  ou  $\Delta^-$  est un morceau connexe d'une surface fermée convexe; 2. Si  $S_T$  et  $S_T'$  sont analytiques et isométriques, elles sont égales; 3.  $S_T$  n'admet aucune déformation infiniment petite. Passant alors aux surfaces irrégulières, l'A. caractérise les surfaces de révolution susceptibles de se déformer infiniment peu [Mat. Sbornik, n. S. 3, 307—322 (1935)]. — Voici maintenant le résumé des travaux d'Olovianichnikoff [Mat. Sbornik, n. S. 18, 429—440 (1946)]. Toute surface non bornée, de courbure totale  $< 2\pi$ , admet des déformations continues. A noter que ce résultat remarquable subsiste sans aucune hypothèse

de régularité et est obtenu au moyen de considérations de pure géométrie. Ce même auteur passe ensuite au cas des polyèdres [Mat. Sbornik, n. S. 18, 441—446 (1946)]: toute surface convexe isométrique à un polyèdre fermé  $P$  est égale à  $P$ ; cette étude s'étend au cas des polyèdres non bornés. — § 17. Problème des formes d'espace. Lignes géodésiques. Une multiplicité  $M_n$  de Riemann à  $n$  dimensions est dite complète, si toute suite bornée infinie de points  $\in M_n$  a, sur  $M_n$  un point d'accumulation au sens de la métrique de Riemann adoptée. Reconnaître si une multiplicité  $M_2$  est complète est un problème sur lequel Killing, Klein, Heinz Hopf ont obtenu des résultats partiels et qui a été résolu en 1934 par Cohn-Vossen quand la courbure est positive. Une multiplicité  $M_2$  à courbure totale positive est homéomorphe soit à la sphère, soit au plan euclidien, soit au plan projectif; Cohn-Vossen étend une partie de ces conclusions à une  $M_n$  quelconque à courbure positive. L'étude des géodésiques au point de vue global a conduit au résultat prévu par Poincaré et démontré par Lusternik et Schnirelmann; sur une  $M_2$  homéomorphe à la sphère, il existe au moins trois géodésiques fermées sans point multiple. Pour une  $M_n$  homéomorphe à la sphère à  $n$  dimensions, on remplace 3 par  $n+1$ . Sur les surfaces irrégulières,  $\int ds^2$  n'a pas de variation au sens Lagrangien du mot: Libermann, Busemann, Feller ont donné quelques résultats valables pour les surfaces convexes: les théorèmes de Morse, Poincaré, Lusternik, Schnirelmann ne peuvent en général être étendus. Mais on peut considérer une surface irrégulière  $F$  comme limite, pour  $n$  infini, d'une surface  $F_n$  régulière (en restant dans le cas où  $F, F_n$  sont convexes); les courbes géodésiques de  $F_n$  peuvent converger vers des courbes limites sur  $F$ ; Alexandroff appelle ces dernières quasi-géodésiques et Pogoreloff a montré que le théorème des 3 géodésiques s'étend aux quasi-géodésiques; l'extension à ces courbes du théorème de Morse est facile. — § 18. Géométrie intrinsèque des surfaces convexes. Ce paragraphe expose les méthodes de A. D. Alexandroff; nous ne pouvons que donner les énoncés de certains problèmes ou résultats; on trouvera un exposé développé dans le livre de l'A. paru en 1948 sous le même titre, livre particulièrement intéressant. — Définition d'une surface convexe  $F$  plongée dans l'espace euclidien ou lobatchefskien (sans aucune hypothèse de régularité, de sorte que les théories de Gauss et Riemann ne peuvent plus être utilisées);  $X, Y$  étant deux points de la multiplicité  $F$ ,  $\varrho_F(x, y)$  désigne la borne inférieure des longueurs des courbes réunissant  $X$  à  $Y$  sur  $F$ ;  $\varrho_F$  définit la métrique sur  $F$ ;  $F$  devient ainsi un espace métrique et sa géométrie intrinsèque étudie les seules propriétés de  $F$  susceptibles d'être exprimées au moyen de  $F$  seule. L'A. définit ensuite intrinsèquement les outils de cette géométrie: angles, longueurs, directions, aire, courbure intégrale d'un domaine, courbure intégrale d'une géodésique; courbes minimales (c'est-à-dire de longueur minimum parmi les courbes ayant les mêmes extrémités; une géodésique n'est que localement minimale; courbes quasi-géodésiques (chemin faisant, l'A. fait connaître de profondes relations entre les éléments ainsi définis). Etude des liens avec l'espace où  $F$  est plongée; toute surface convexe  $F$  est limite d'une suite de polyèdres convexes  $F_n$ ; si une propriété est valable pour tout polyèdre convexe  $F_n$ , elle s'étend à  $F$ . Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique donnée a priori soit la métrique d'une surface convexe et qu'une multiplicité  $R_2$  soit isométrique à une surface convexe, globalement ou localement. Théorème sur l'approximation d'une métrique donnée au moyen d'une métrique polyédrale et existence d'un polyèdre doué d'une métrique donnée. Théorème sur le „collage“ d'éléments appartenant à une multiplicité homéomorphe à un domaine sphérique de façon à former une surface convexe complète. Applications diverses de ce résultat fondamental. — § 19. Corps convexes. Busemann et Feller ont montré que si un morceau de surface convexe à deux dimensions est représenté en coordonnées rectangulaires par  $z = f(x, y)$ ,  $f$  admet presque partout une différentielle seconde. A. D. Alexandroff étend ce résultat au cas de  $n$  dimensions. Libermann donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé borné ayant des points intérieurs soit convexe. Alexandroff introduit, dans la théorie des corps convexes, des fonctions additives d'ensemble et s'en sert pour trouver dans quel cas deux corps convexes sont égaux et superposables par transport parallèle: l'A. obtient ainsi des résultats remarquables généralisant beaucoup ceux déjà connus. Si deux surfaces analytiques convexes  $F$  et  $F'$ , fermées, plongées dans un espace à 3 dimensions sont telles qu'aux points  $M, M'$ , où les normales à  $F$  et  $F'$  sont parallèles, l'indicatrice de Dupin en  $M$  de  $F$  ne peut être placée à l'intérieur de l'indicatrice de Dupin en  $M'$  de  $F'$  et réciproquement,  $F$  et  $F'$  sont égales et superposables par transport parallèle. Dans l'espace à 3 dimensions nous avons le résultat analogue pour les polyèdres convexes: si deux polyèdres convexes ont leurs faces parallèles deux à deux, et si aucune face de l'un ne peut, par transport parallèle, être placée à l'intérieur de la face correspondante de l'autre, et réciproquement, ces deux polyèdres sont égaux et peuvent se superposer par un transport parallèle. — § 20. Géométrie polymétrique. L'A. constate dans l'espace ordinaire à deux dimensions de deux métriques: l'une est celle du  $ds^2$ , l'autre est celle qui donne l'angle de deux directions issues d'un point (c'est une géométrie bimétrique). Dans le plan elliptique, il y a dualité totale entre les angles et les longueurs: c'est l'exemple type de la dualité métrique parfaite et cela a servi de point de départ aux recherches de Rachevsky (1935). Dans le plan, on considère un point  $(x, y)$  et la pente  $z$  d'une droite issue de ce point;  $(x, y, z)$  définissent donc un élément linéaire; on dira que l'élément  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  est adhérent à l'élément  $(x, y, z)$  si  $dy = z dx$ .



On fonde la géométrie de ces éléments sur une transformation  $X = X(x, y, z)$ ,  $Y = Y(x, y, z)$ ,  $Z = Z(x, y, z)$  de jacobien non nul telle que  $dy = z dx$  entraîne  $dY = Z dX$  (transformation de contact au sens de Lie). L'espace des éléments linéaires est celui où nous avons défini la notion d'adhérence et fixé les transformations du groupe de la géométrie correspondante. La métrique de l'espace introduit est  $ds = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dz$ ,  $ds$  devant être invariant par une transformation du groupe. En particulier, si  $B = 0$ , on obtient une métrique de Finsler. Rachevsky considère un espace de métrique donnée a priori  $ds = A dx + B dz$  telle que  $AB \neq 0$ . Les lignes de longueur nulle sont données par le système  $A dx + B dz = 0$ ,  $dy - z dx = 0$ . Rachevsky appelle canonique le système de coordonnées  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  où  $X = cte$ ,  $Y = cte$  sont les transformées de ces lignes. Avec ces coordonnées canoniques, la métrique devient finslerienne:  $ds = A(X, Y, dY/dX) dX$ . Le point capital de la théorie de Rachevsky consiste à envisager simultanément deux métriques  $ds_1, ds_2$  non réductibles toutes deux à la fois à la forme finslerienne; on a alors une géométrie bimétrique. — § 21. Immersion des espaces de Riemann et Cartan. Le cas de deux dimensions excepté, ce problème n'est, actuellement, étudié que du point de vue local: on cherche les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un voisinage arbitrairement petit d'un point de l'espace de Riemann à  $n$  dimensions admette une application isométrique sur une surface convenable d'un espace euclidien à  $m$  dimensions; on doit avoir  $m \geq n(n+1)/2$ , le cas de l'égalité ayant été démontré par Burstin en 1931—1932; cet auteur a étudié aussi le problème de la déformation d'une surface à  $n$  dimensions plongée dans un espace euclidien à  $m$  dimensions. — Le problème de l'immersion locale d'une multiplicité à courbure constante dans une autre de même nature a conduit Liber au résultat suivant: Tout domaine assez petit d'un espace de Lobatchevsky de courbure  $K < 0$ ,  $R_{K_0}^m$ , est immersible dans l'espace euclidien ou dans l'espace sphérique  $R_{K_0}^n$  ( $K_0 \geq 0$ ) si et si seulement  $m \leq (n+1)/2$ . Si  $n = 3$ ,  $m \leq 2$ ; donc tout espace à 2 dimensions est localement immersible dans  $R_{K_0}^3$ ; le théorème est faux, globalement parlant (Hilbert). Reste la question de savoir quel est le plus petit entier  $n$  tel que dans l'espace à  $n$  dimensions on puisse immerger le plan lobatchevskien entier: le problème semble difficile. — G. F. Laptev a résolu le problème de l'immersion de l'espace de Cartan admettant le groupe de connexion  $G$  dans l'espace de Klein admettant le même groupe  $G$ , en supposant que  $G$  soit le groupe affine. Chaque espace à  $m$  dimensions à connexion affine à torsion nulle est immersible dans l'espace affine à  $n$  dimensions si  $n \geq \frac{1}{2}(m^2 + 2m - 1)$ ; cette immersion est réalisée avec  $n(m+1) - \frac{1}{2}m^2(m-3)$  fonctions arbitraires. Laptev définit la torsion d'un espace affine  $X_n$  en chaque point par l'intermédiaire d'une courbe fermée  $L$  partant de ce point et y revenant et considérant la représentation affine de l'espace tangent à  $X_n$  en un point de cette courbe sur l'espace tangent au point immédiatement consécutif; en suivant par continuité la courbe et revenant au point de départ, on obtient donc une représentation sur lui-même de l'espace tangent au point initial; soit  $\varphi$  cette représentation; si  $L$  tend vers un point,  $\varphi$  ne diffère d'une représentation identique que par des termes d'ordre 2 au moins, l'infiniment petit principal étant le diamètre de  $L$ ; si ces termes sont d'ordre 2, l'espace étudié a une torsion définie par ces termes et si ces termes sont d'ordre supérieur à 2, la torsion est nulle. — § 22. Multiplicités non holonomes. Dans ses travaux de 1929—1930, Schouten a défini les multiplicités non holonomes  $X_n^m$ , construites au moyen de  $(n-m)$  formes de Pfaff, sur une multiplicité  $X_n$  à connexion affine, à  $n$  dimensions. Si de plus  $X_n$  possède une métrique riemannienne, Schouten a formé sur  $X_n^m$  une métrique définissant ainsi les multiplicités non holonomes métriques  $V_n^m$ . On peut alors parler de la géométrie intrinsèque de  $V_n^m$  (étude des propriétés de  $V_n^m$  s'exprimant au moyen de la métrique de  $V_n^m$  seule) au sens de Schouten. Avec ces outils, Schouten a tenté, avec peu de succès, d'aborder le problème de la courbure de  $V_n^m$ : il s'agit de former un tenseur dont la nullité traduise la condition nécessaire et suffisante assurant l'existence du parallélisme absolu sur  $V_n^m$  (connue pour les espaces ordinaires de Riemann). V. Wagner a réussi à traiter complètement la question, en introduisant une définition différente de la métrique sur  $V_n^m$ ; le tenseur qu'il forme est de rang 4, comme dans la géométrie de Riemann; par contre l'ordre des dérivées des coefficients du  $ds^2$  est supérieur à 2 et cet ordre dépend de  $V_n^m$ . Ce progrès permet à Wagner d'aborder le problème de l'immersion de  $V_n^m$  dans l'espace  $V_n$  de Riemann, problème réductible, si  $V_n$  est euclidien, à celui de l'existence de racines réelles d'une équation algébrique. Wagner étudie ensuite le système des invariants différentiels du champ tensoriel métrique; il donne aussi divers résultats relatifs aux géodésiques des  $V_n^m$ .

B. Gambier (Paris) et J. Kravtchenko (Grenoble).

Petrov, A. Z.: Über die Krümmung Riemannscher Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 211—214 (1948) [Russisch].

L'A. introduce, per una varietà Riemanniana  $V_n$  a metrica anche indefinita un invariante (scalare) che generalizza in certo modo la curvatura Riemanniana, e che l'A. chiama „curvatura quadrica“. Tale invariante, che si definisce a partire da un bivettore (semplice)  $v^{ij}$  è il quoziente di due forme, l'una quadratica nelle componenti del tensore di curvatura della  $V_n$ , e di quarto grado nelle componenti  $v^{ij}$ .



l'altra di quarto grado nelle  $v^{ij}$ . Da ciò la denominazione; l'A. prova che la curvatura quadratica misura, in un certo senso, la variazione che il bivettore  $v^{ij}$  subisce quando lo si trasporti per parallelismo lungo un circuito infinitesimo contornante un elemento superficiale tangente al bivettore stesso. Viene preso in considerazione poi il problema delle  $V_n$  a curvatura quadratica costante; si trova che ogni  $V_n$  a curvatura Riemanniana costante è anche a curvatura quadratica costante; tale risultato si inverte per  $n = 3$ ; per  $n = 4$  l'A. trova invece che gli spazi a curvatura quadratica costante sono spazi di Einstein (per cui, cioè il tensore di Ricci:  $R_{hk}^i = R_{hk}$  è della forma  $R_{hk} = R g_{hk}$ , con l'usuale significato dei simboli).

V. Dalla Volta (Roma).

**Volta, Vittorio Dalla:** Una questione di geometria Riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 64—68 (1949).

Soit  $n(x, y, z)$  l'indice de réfraction d'un milieu isotrope optique et  $ds^2 = n^2(x, y, z) [dx^2 + dy^2 + dz^2]$  la métrique de la variété de Fermat associée à ce milieu. On suit que, lorsque cette variété est à courbure constante, dans sa représentation conforme sur l'espace euclidien, les sphères correspondent aux sphères. L'A. se propose de résoudre le problème inverse et établit le théorème suivant: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété riemannienne  $ds^2 = (1/U^2) \sum_1^n (dx^i)^2$  soit représentable conformément sur l'espace euclidien avec conservation des hypersphères est qu'elle soit à courbure riemannienne constante. D'un résultat de Fubini [Ann. Mat. Battaglini, III. S. 16, 141—160 (1909)], il résulte alors que les seules variétés riemanniennes qui admettent une application ponctuelle sur l'espace euclidien avec conservation des hypersphères sont à courbure constante. Lichnerowicz (Paris).

**Castoldi, L.:** Dislocazioni e deformazioni finite nelle varietà sostanziali di Riemann. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 7, 373—392 (1948).

Die Differentialgleichung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $V_m$ , gegeben durch  $x^i = x^i(q^1, \dots, q^m)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die in eine  $V_n$  eingebettet ist mit  $m < n$ , stellt die Verallgemeinerung der Theorie der endlichen Formänderung einer euklidischen Mannigfaltigkeit dar, in der der Verzerrungstensor durch die Differenz der metrischen Fundamentaltensoren in Bild- und Urbildpunkt erklärt ist. Die Transformation  $x'^i = x^i(q^x) + u^i(q^x)$ , die als „dislocazione“ bezeichnet wird, braucht dabei nicht als eine Transformation der  $V_m$  in sich gedeutet zu werden. Der Verzerrungstensor der  $V_m$  bestimmt die Drehungen und Winkeländerungen der Abbildung. Außer diesen ausführlich dargestellten Zusammenhängen wird noch das Verhalten der Krümmungseigenschaften der  $V_m$  bei der Transformation untersucht.

Moufang (Frankfurt a. M.).

**Walker, A. G.:** Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes. Quart. J. Math. (Oxford. II. S.) 1, 69—79 (1950).

Es wird bewiesen, daß es in einer  $V_n$ , die ein pseudoparalleles Feld von Null- $E_r$  (null  $r$ -planes, vgl. A. G. Walker, dies. Zbl. 33, 131) gestattet, stets ein Koordinatensystem gibt, in bezug auf welches die Matrix der  $g_{\lambda\kappa}$  folgende Gestalt annimmt

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow r \rightarrow & \leftarrow 2n-r \rightarrow & \leftarrow r \rightarrow \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & J \\ 0 & A & H \\ J & H' & B \end{array} \right| \end{array}$$

Es ist stets  $r \leq \frac{1}{2}n$ .  $J$  ist die Einheitsmatrix und  $A$ ,  $H$  und  $H'$  hängen nicht von  $\xi^1, \dots, \xi^r$  ab. Die Maßvektoren  $e_1^x, \dots, e_r^x$  spannen in jedem Punkte die Null- $E_r$  auf. Für den Fall, daß  $r$  maximal ist, vereinfacht sich die Matrix bedeutend. Fordert

man, daß sich das  $E_r$ -Feld aus pseudoparallelen Richtungsfeldern zusammensetzt, so erhält man ein Theorem von Eisenhart [Ann. Math. 39, 3—16 (1938)] und für den Fall, daß  $r$  außerdem maximal ist, eine Verallgemeinerung eines Resultates von H. S. Ruse [dies. Zbl. 30, 372 und Proc. London math. Soc., II. S. 50, 438—446 (1947)].

Schouten.

Walker, A. G.: Canonical forms. II: Parallel partially null planes. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) 1, 147—152 (1950).

In der zweiten Arbeit wird eine Normalform für  $g_{\lambda\kappa}$  entwickelt für den Fall eines pseudoparallelen  $E_{r+s}$ -Feldes, das nur teilweise Nullfeld ist. Enthält die  $E_{r+s}$  überall genau eine Null- $E_r$ , so ist  $2r + s \leq n$  und das Koordinatensystem kann stets so gewählt werden, daß die Matrix der  $g_{\lambda\kappa}$  folgende Gestalt annimmt

$$\begin{vmatrix} \leftarrow r \rightarrow & \leftarrow s \rightarrow & \leftarrow n-2r-s \rightarrow & \leftarrow r \rightarrow \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & A & 0 & F \\ 0 & 0 & B & G \\ J & F' & G' & C \end{vmatrix}$$

$\text{Det}(g_{\lambda\kappa}) = (-1)^r \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$ .  $A$ ,  $F$  und  $F'$  sind unabhängig von  $\xi^1, \dots, \xi^r, \xi^{r+s+1}, \dots, \xi^{n-r}$ .  $B$ ,  $G$  und  $G'$  sind unabhängig von  $\xi^1, \dots, \xi^r$ . Die  $E_{r+s}$  wird aufgespannt von den Maßvektoren  $e_1^*, \dots, e_{r+s}^*$  und die Null- $E_r$  von  $e_1^*, \dots, e_r^*$ . Für den Fall, daß das  $E_{r+s}$ -Feld aus pseudoparallelen Richtungsfeldern aufgebaut ist, ergibt sich ein Theorem von Eisenhart (l. c.).

Schouten (Epe/Holland).

Hesselbach, Benno: Über die Erhaltungssätze der konformen Geometrie. Math. Nachr., Berlin 3, 107—126 (1950).

In una varietà Riemanniana  $R_n$  esiste un tensore  $T_{ik}$  (legato al tensore di curvatura), per cui vale la seguente relazione:  $T_{ik}^{ik} = 0$  (il; in basso a destra indicando derivazione covariante). Vale cioè, secondo il principio variazionale di Hilbert, un teorema di conservazione. In questo lavoro l'A. cerca di stabilire un teorema analogo per la geometria conforme, onde poterne eventualmente dare un'interpretazione fisica, per lo meno nel caso di 4 dimensioni. — Dopo aver rapidamente riassunte le principali formule della geometria conforme, si determina un sistema completo di invarianti per il tensore di curvatura conforme (usufruendo di una rappresentazione geometrica delle rotazioni infinitesime in uno spazio proiettivo a cinque dimensioni); applicando poi il principio variazionale di Hilbert, si prova l'esistenza di un tensore  $U_{ik}$ , che dipende dalle derivate dei coefficienti della metrica fino a quelle del quarto ordine, e che, per  $n = 4$ , è invariante conforme, e coincide con un tensore già introdotto da Schouten e Haantjes [Math. Ann., Berlin 112, 594—629; 113, 568—583 (1936); questo Zbl. 13, 367; 15, 177]. Poichè per esso vale la relazione  $U_{ik}^{ik} = 0$ , ne segue l'esistenza di un teorema di conservazione per la geometria conforme. Nell'ultimo paragrafo, si cerca di interpretare fisicamente il risultato trovato, supponendo che le grandezze conformi corrispondano al campo elettromagnetico.

D. Valla Volta (Roma).

Davies, E. T.: The theory of surfaces in a geometry based on the notion of area. Proc. Cambridge phil. Soc. 43, 307—313 (1947).

Generalizzando la nozione introdotta da Cartan [Actualités sci. industr. Nr. 72, Paris 1933], di spazi fondati sulla nozione d'area, l'A. studia qui la possibilità di spazi aventi come elemento di appoggio un  $r$ -vettore relativo (densità vettoriale) contro-(co)-variante di peso  $+p$  ( $-p$ ); sono possibili allora i seguenti casi, se  $n$  è la dimensione dello spazio ambiente, in cui si suppone dato l'elemento di appoggio: [le lettere a) e b) si riferiscono rispettivamente al caso in cui sia dato come elemento d'appoggio un  $r$ -vettore co- o controvariante] a (i): una



varietà subordinata ad  $n-r$  dimensioni, tangente in ogni punto all'elemento d'appoggio. a(ii): una varietà subordinata ad  $r$  dimensioni, normale in ogni suo punto all'elemento di appoggio. a(iii): una varietà subordinata ad  $n-r+s$  ( $s = 1, 2, \dots, r-1$ ) dimensioni, tangente in ogni suo punto all'elemento di appoggio. b(i): una varietà subordinata ad  $r$  dimensioni, tangente in ogni suo punto all'elemento di appoggio. b(ii): una varietà subordinata ad  $n-r$  dimensioni, normale in ogni suo punto all'elemento di appoggio. b(iii): una varietà subordinata ad  $r+s$  dimensioni ( $s = 1, 2, \dots, n-r-1$ ), tangente in ogni suo punto all'elemento d'appoggio. Per i casi a(i), a(ii), b(i), b(ii) sono date le principali formule della geometria valida in essi.

*D. Valla Volta* (Roma).

**Freeman, J. G.:** A generalisation of minimal varieties. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 66—72 (1948).

The author considers a generalised metric space  $S_n$ , with each point of which is associated a contravariant vector-density  $w^i$  of weight  $p$ , called the element of support [Comp. J. A. Schouten and J. Haantjes, *Mh. Math. Phys.*, Wien **43**, 161—176 (1936); this *Zbl.* **13**, 366]. A subspace  $S_r$  is said to be a minimal variety in  $S_n$  if for any region  $R$  in  $S_r$  bounded by a closed hypersurface  $B_{r-1}$  the first variation of the volume integral vanishes for arbitrary displacements of points of  $S_r$  and of the element of support, which vanish on  $B_{r-1}$ . The necessary and sufficient conditions for a minimal variety  $S_r$  are given. An expression is derived for the mean curvature of a minimal variety with respect to a normal. It is shown that the mean curvature with respect to the element of support (in the case that  $w^i$  is normal to  $S_r$ ) vanishes.

*J. Haantjes* (Leiden).

**Varga, O.:** Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz. *Publ. Math.*, Debrecen **1**, 7—17 (1949).

Dans une première partie, l'A. donne un exposé nouveau de la théorie des connexions affines de variétés d'éléments linéaires [Varga, *Lotos* **84**, 1—4 (1936); *Lichnerowicz. Ann. sci. École norm. sup.*, III. S. **62**, 339—384 (1945)]. La théorie des courbures et torsions apparaît identique à celle du rapporteur. Cet exposé sert d'introduction à une résolution complète du problème fondamental d'équivalence qui se trouve complètement résolu au moyen du lemme classique de Veblen-J. M. Thomas. Il en résulte la première détermination d'un système complet d'invariants différentiels pour une telle variété.

*Lichnerowicz* (Paris).

**Segre, Beniamino:** Geometria dello spazio fisico. *Archimede*, Firenze **1**, 73—81 (1949).

Dans cette conférence, l'A. commence par distinguer ce qu'on peut entendre par géométrie mathématique, discipline mathématique abstraite, et géométrie physique qui se préoccupe de savoir quelles propriétés géométriques il convient d'attribuer à l'espace physique de nos expériences sensibles. Dans une première partie, il montre les difficultés qu'il y a à donner un sens clair au problème même ainsi posé et revient sur les réponses successivement données par l'histoire au point de vue local (Riemann, Finsler) et global (Klein, Killing). Dans une seconde partie, il montre que l'un des problèmes fondamentaux de la géométrie physique peut s'énoncer mathématiquement de la manière suivante: caractériser deux espaces qui admettent, l'un sur l'autre, une représentation possédant une propriété assignée, par exemple conservant certains êtres géométriques (géodésiques, sphères etc.). Après avoir rappelé les résultats classiques dans cette voie (résultats de Beltrami, Dini, Levi-Civita sur la représentation géodésique des variétés à courbure constante), il annonce des résultats nouveaux fournissant de nouvelles caractérisations des espaces à courbure constante: les variétés à courbure constante sont les seules variétés riemanniennes admettant des représentations conformes sur l'espace euclidien telles que les géodésiques soient représentées par des lignes à courbure constante; ce sont aussi les seules variétés finsleriennes admettant des représen-

tations sur l'espace euclidien telles que les hypersphères correspondent aux hypersphères. Des applications à l'optique géométrique et aux variétés de Fermat associées à un milieu optique terminent cet exposé. Les démonstrations paraîtront dans d'autres périodiques. *Lichnerowicz* (Paris).

## Topologie:

● **Bourbaki, N.:** *Éléments de mathématique. X. 1<sup>re</sup> Pt. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III: Topologie générale. Chapitre X: Espaces fonctionnels. Dictionnaire.* (Actual. sci. industr., No. 1084.) Paris: Hermann & Cie. 1949. 101 p.

Bei der Betrachtung der Topologien des Systems  $\mathfrak{F}(X, Y)$  der eindeutigen Abbildungen von  $X$  in  $Y$  wird von vornherein vorausgesetzt, daß  $X$  ein topologischer und  $Y$  ein uniformer Raum ist.  $\mathfrak{F}$  wird zu einem uniformen Raum  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$  vermöge der uniformen Konvergenz auf Teilmengen  $S$  von  $X$  eines Systems  $\mathfrak{C}$ ; Spezialfälle davon sind die einfache Konvergenz, die uniforme Konvergenz auf  $X$ , und die kompakte Konvergenz, bei welcher  $\mathfrak{C}$  aus allen kompakten Teilmengen von  $X$  besteht. Die topologischen Eigenschaften von  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$  werden näher untersucht; z. B. ist  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ , falls darin das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt, dann und nur dann vollständig, wenn  $Y$  es ist. Das System  $\mathfrak{B}(X, Y)$  der beschränkten Abbildung wird eingehend studiert im Falle, daß  $Y$  metrisch oder linear metrisch ist. In je einem eigenen Abschnitt kommen das System  $\mathfrak{C}(X, Y)$  der stetigen Abbildungen, ferner die Mengen von Abbildungen gleichgradiger Stetigkeit und die kompakten Mengen stetiger Abbildungen zur Behandlung. Auch die topologischen Selbstabbildungen eines Raumes werden dabei berührt, sei es, daß eine gleichgradig stetige oder eine lokal kompakte Gruppe von solchen Abbildungen Gegenstand sind. Der letzte Abschnitt ist der Approximation stetiger reeller Funktionen gewidmet, welche im Weierstraß-Stoneschen Satz [M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Magazine, Texas **21**, 167—184, 237—254 (1948)] gipfelt: Der Ring  $\mathfrak{R}[\mathfrak{F}]$  aller Funktionen, die ganz rational aus dem Körper der reellen Zahlen und einem Teilsystem  $\mathfrak{F}$  des Systems  $\mathfrak{C}(X, R)$  der stetigen reellen Funktionen auf dem Kompaktum  $X$  erzeugbar sind („Polynomring über  $\mathfrak{F}$ “), ist dann und nur dann in  $\mathfrak{C}(X, R)$  dicht im Sinne uniformer Konvergenz auf  $X$ , wenn  $\mathfrak{F}$  auf  $X$  separativ ist. Das Letzte besagt, daß es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  von  $X$  eine Funktion  $f$  aus  $\mathfrak{F}$  gibt mit  $f(x) \neq f(y)$ . — An die 70 Übungsaufgaben sorgen in der für Bourbaki üblichen Weise für weitere Anregungen. Das Ende des Kapitels bilden eine kurze historische Note und Verzeichnisse für Bezeichnungen und Begriffe. — Als Abschluß des dritten Buches ist ein Lexikon der topologischen Sprache beigegeben, in dem auch die deutschen und englischen Wortbildungen gesammelt sind. Es trifft ein allgemeines dringendes Bedürfnis, besitzt aber leider nicht ganz die wünschenswerte Vollständigkeit. *Aumann* (Würzburg).

**Nagata, Jun'ichi:** *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces.* Osaka math. J. **1**, 166—181 (1949).

L'A. étend à des espaces topologiques (ou uniformes) non compacts les théorèmes bien connus sur la caractérisation de la topologie d'un espace compact par les propriétés de l'ensemble des fonctions continues numériques sur un tel espace. Citons deux de ses résultats: I. Soient  $R_1, R_2$  deux espaces complètement réguliers.  $L(R_1)$  et  $L(R_2)$  les „lattices“ de fonctions numériques bornées,  $\geq 0$  et semi-continues supérieurement dans  $R_1$  (resp.  $R_2$ ); pour que  $R_1$  et  $R_2$  soient homéomorphes, il faut et il suffit que  $L(R_1)$  et  $L(R_2)$  soient isomorphes. II.  $R_1$  et  $R_2$  étant encore complètement réguliers, soient  $C(R_1)$  et  $C(R_2)$  les anneaux de fonctions continues dans  $R_1$  et  $R_2$ , munis de la topologie de la convergence simple; pour que  $R_1$  et  $R_2$  soient homéomorphes, il faut et il suffit que les anneaux topologiques  $C(R_1)$  et  $C(R_2)$  soient isomorphes. D'autres théorèmes donnent des conditions analogues



pour que deux espaces uniformes soient isomorphes. Les méthodes employées consistent toujours à identifier les points de l'espace considéré à certains idéaux maximaux de l'anneau (ou du „lattice“) que l'on envisage. *J. Dieudonné* (Nancy).

**Pereira Gomes, Alfredo:** Topologie induite par un pseudo-diamètre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 107—109 (1948).

Verf. erklärt auf einem Vollverband  $E$  mit Hilfe eines Pseudodiameters  $\delta(x) \in \Sigma$  (s. Verf., dies. Zbl. **30**, 342) eine Topologie. Ein abgeschlossenes bzw. offenes Sphäroid  $V(a, \lambda)$  bzw.  $U(a, \lambda)$  um  $a$  mit dem Radius  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \in \Sigma$  wird erklärt. Dann werden mit Hilfe dieses Begriffes die abgeschlossene Hülle  $a$  von  $a \in E$  bzw. die offenen und abgeschlossenen Elemente  $a \in E$  definiert. Diese Topologie wird weiter für spezielle Verbände (distributive, distributive und atomare) mit speziellen  $\delta(x)$  (filtrierend, separativ usw.) untersucht. Die meisten Resultate ohne Beweis.

*D. A. Kappos* (Erlangen).

**Golab, St.:** Espace pourvu d'une métrique définie au moyen de l'écart triangulaire et les espaces métriques généralisés. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **21**, 226—235 (1949).

$D$  désigne un espace distancié selon Fréchet pourvu d'une métrique secondaire  $\varrho$  satisfaisant aux conditions  $\varrho(pp) = 0$ ,  $\varrho(pq) \geq 0$ , convexe et continue vis-à-vis de la métrique primaire.  $I(pq)$  représente l'ensemble de tous les points  $x$  jouissant de la propriété  $\varrho(px) + \varrho(xq) \leq \varrho(pq)$ . Théorème: Si l'intersection  $A$  des ensembles  $I(pq)$  correspondant aux couples de points  $p, q$  de  $D$  est non vide, il existe pour  $p \neq q$  un arc géodésique de longueur nulle joignant  $p$  et  $q$ . La démonstration de ce théorème est esquissée. Il s'agit principalement de montrer que pour un point  $a$  de  $A$ , donc tel que  $\varrho(pa) = \varrho(ap) = 0$  quel que soit  $p$ , il existe une géodésique de longueur nulle joignant  $a$  et  $p$ . Le procédé est analogue à celui par lequel Menger établit l'existence d'arcs géodésiques dans un espace métrique convexe et complet. L'hypothèse que  $D$  est complet n'est pas exprimée. Le choix du „point milieu“ entre deux points n'est pas précisé. Une illustration est donnée qui constitue un exemple intéressant d'un espace de Finsler à deux dimensions auquel ne s'applique pas la théorie de Tonelli.  $D$  est le plan des  $x = (x', x'')$  muni de la distance euclidienne,  $o$  représente l'origine  $(0, 0)$ , si  $p = (p', p'')$ ,  $q = (q', q'')$ ,  $\varrho(pq) = |p'q'' - q'p''|$ . L'écart  $\varrho(pq)$  est donc égal au double de l'aire du triangle  $(opq)$ . L'indicatrice en  $x \neq o$  comprend deux droites parallèles à  $ox$ , pour  $x = o$  elle est rejetée à l'infini.  $I(pq)$  est le parallélogramme  $ppq^*q^*$ , où  $p^*$  et  $q^*$  représentent les points symétriques de  $p$  et  $q$  respectivement par rapport à  $o$ . La géodésique joignant  $p$  et  $q$  pour  $p \neq q$ ,  $p \neq o$ ,  $q \neq o$  se compose des segments  $po$  et  $oq$ . Soit  $M$  un plan minkowskien dont l'indicatrice se compose de deux droites parallèles  $D'$  et  $D''$ . L'A. énonce (sans preuve) la caractérisation suivante des géodésiques  $G(pq)$  joignant un point  $p$  à un point  $q$  tels que  $pq$  ne soit parallèle ni à  $D'$  ni à  $D''$ :  $G(pq)$  est une courbe  $C$  joignant  $p$  à  $q$  telle qu'en tout point  $m$  de  $C$ , chaque rayon du contingent de la courbe orientée de  $p$  vers  $q$  transporté parallèlement en  $o$  rencontre la droite de l'indicatrice qui est intersectée par le rayon issu de  $o$  et parallèle au vecteur  $pq$ . (Remarque du Réf.: Le rayon du contingent peut être parallèle à  $D'$  et  $D''$ . Le théorème semble évident si nous choisissons un système d'axes  $oX'$ ,  $oX''$  telle que l'équation de l'indicatrice soit  $|x''| = 1$ . La longueur minkowskienne d'une courbe  $C: x' = x'(t)$ ,  $x'' = x''(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , est alors la variation totale de  $x''(t)$  sur  $(a, b)$ . Pour  $x(a) = p$  et  $x(b) = q$  fixés le minimum est  $|x''(b) - x''(a)|$  et est atteint pour toute fonction  $x''$  monotone au sens large vérifiant  $x''(a) = p''$  et  $x''(b) = q''$ .)

*Chr. Pauc* (Le Cap).

**Mickle, E. J. and T. Rado:** On cyclic additivity theorems. *Trans. Amer. math. Soc.* **66**, 347—365 (1949).

The general reference book for this paper is T. Rado (this Zbl. **33**, 170).  $P$  denotes a fixed Peano space.  $P^*$  a fixed metric space,  $\mathfrak{T}$  the class of all continuous

mappings  $T$  from  $P$  into  $P^*$ . A factorization of a mapping  $T$  consists of two mappings  $f, s$  and of a Peano space  $\mathfrak{M}$  (middle-space) such that  $f$  is a continuous mapping from  $P$  into  $M$ ,  $s$  is a continuous mapping from  $M$  into  $P^*$  and  $T = sf$ . In a monotone-light factorization,  $f$  is required to be monotone,  $s$  is required to be light, and  $f$  is required to map  $P$  onto  $\mathfrak{M}$ . A partition of  $T$  is a pair of mappings  $T_1, T_2$ , for which there exists a point  $p_0^*$  in  $P^*$  and a pair of closed subsets  $E_1, E_2$  in  $P$  satisfying the relations  $E_1 + E_2 = P$ ,  $T_1(p) = T(p)$  if  $p \in E_1$ ,  $T_1(p) = p_0^*$  if  $p \in E_2$ ,  $T_2(p) = p_0^*$  if  $p \in E_1$ ,  $T_2(p) = T(p)$  if  $p \in E_2$ .  $\Phi$  represents a functional defined for  $T \in \mathfrak{T}$ , verifying the following conditions (a)  $\Phi(T)$  is real, non-negative, non necessarily finite, (b) If  $T$  is constant on  $P$ , then  $\Phi(T) = 0$ , (c)  $\Phi$  is lower semi-continuous with respect to the Fréchet distance

$$d(T', T'') = \max_p \varrho(T'(p), T''(p)),$$

$p \in P$ , where  $\varrho$  denotes the distance in the metric space  $P^*$ , (d)  $\Phi$  is additive under partition, i. e. if  $T_1, T_2$  form a partition of  $T$ , then  $\Phi(T) = \Phi(T_1) + \Phi(T_2)$ .  $\Phi$  is termed strongly (weakly) additive, if for every  $T$  in  $\mathfrak{T}$  and for every unrestricted (monotone-light) factorization of  $T$ ,  $\Phi(T) = \Sigma \Phi(sr_C f)$ , where  $C$  is the generic notation for a proper cyclic element of the middle-space  $\mathfrak{M}$  and  $r_C$  for the monotone retraction from  $\mathfrak{M}$  onto  $C$ . The main result established in the paper is: Supposing that  $\Phi$  satisfies conditions (a), (b), (c), (d) and (e) namely: If the mapping  $T$  in  $\mathfrak{T}$  admits of an unrestricted factorization where the middle space  $\mathfrak{M}$  is a simple arc, then  $\Phi(T) = 0$ ; then  $\Phi$  is strongly additive. The strong additivity property for the Lebesgue area  $A$  is derived from the following theorem: A Peano space  $P_0$  is said to possess the property  $\lambda$  if for each proper cyclic element  $C$  of  $P_0$  and any closed and totally disconnected set  $E$  in  $C$ ,  $C - E$  is a connected set. Then, assuming that every monotone image of  $P$  possesses the property  $\lambda$  and that  $\Phi$  satisfies (a), (b), (c), the weak additivity property implies the strong one. *Pauc.*

**Friedlander, F. G.:** On the iteration of a continuous mapping of a compact space into itself. *Proc. Cambridge phil. Soc.* **46**, 46—56 (1950).

L'A. considère une application  $t$  continue (mais pas nécessairement bi-univoque) d'un espace métrique  $E$  dans lui même; il étudie suivant un plan classique les trajectoires que décrivent les points de  $E$  (périodicité, récurrence, etc. . .). En particulier l'A. démontre un certain nombre de théorèmes analogues à des résultats classiques de Cherry sur la structure des ensembles limites d'une trajectoire et sur la stabilité asymptotique. (Exemple: Théorème 11: Si le point  $x$  est asymptotiquement stable et si  $x$  est un point limite d'une trajectoire, alors l'ensemble limite  $A_x$  de  $x$  est minimal; si de plus  $x \in A_y$  alors  $A_x = A_y$  et  $y$  est asymptotiquement stable.)

*Reeb (Strasbourg).*

**Newman, M. H. A.:** Local connection in locally compact spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **1**, 44—53 (1950).

Hurewicz hat [Fundam. Math. **25**, 467 (1935); dies. Zbl. **12**, 319] bewiesen, daß ein kompakter metrischer Raum  $X$ , der in den Dimensionen  $\leq 1$  lokal-zusammenhängend im Homotopiesinn und in den Dimensionen  $\leq p$  ( $p \geq 2$ ) lokal-zusammenhängend im Homologiesinn ist, auch in den Dimensionen  $\leq p$  lokal-zusammenhängend im Homotopiesinn ist. Verf. beweist — als Spezialfall eines etwas allgemeineren Theorems — den obigen Satz auch für einen lokal-kompakten Raum  $X$ . Derselbe Satz gilt auch für den gleichmäßig lokalen Zusammenhang. *Burger.*

**Begle, Edward G.:** The Vietoris mapping theorem for bicomact spaces. *Ann. Math.*, Princeton, II. S. **51**, 534—543 (1950).

Ist  $X$  ein bikompakter Hausdorffraum und  $M$  eine Überdeckung von  $X$  mit endlich vielen offenen Mengen, so wird unter  $X(M)$  der (unendliche, unendlich-dimensionale) Komplex aus allen Simplexes verstanden, deren Ecken in einer Menge von  $M$  liegen. Ist  $N$  eine verfeinerte Überdeckung, so ist  $X(N)$  offenbar ein Teil-



komplex von  $X(M)$ . Unter  $I^n(M)$  werde eine  $n$ -dimensionale Kette des Komplexes  $X(M)$  verstanden. Eine Menge  $\gamma^n$  von Ketten  $I^n(M)$  heißt ein  $n$ -dimensionaler Vietoris-Zyklus, wenn sie zu jeder Überdeckung  $M$  genau ein  $I^n(M)$  enthält, wenn dabei  $I^n(N)$  zu  $I^n(M)$  homolog ist, falls  $N$  eine Verfeinerung von  $M$  ist, und wenn alle diese Ketten geschlossen sind. Ein solcher Zyklus heißt homolog zu Null, wenn alle seine Komponenten homolog zu Null sind. Die Homologieklassen dieser Zyklen definieren die Vietoris-Homologiegruppen  $H_v^n(X)$  des Raumes  $X$ . Es wird gezeigt, daß dieselben zu den Gruppen von Čech isomorph sind. — Sind  $X$  und  $Y$  zwei bikompakte Hausdorffräume und  $f$  eine stetige Abbildung von  $X$  in  $Y$ , so induziert  $f$  eine Abbildung der Vietoriszyklen von  $X$  in die von  $Y$ . Das Haupttheorem der Arbeit besagt: Ist der Koeffizientenbereich der Ketten eine elementare kompakte topologische Gruppe oder ein Körper, bedeckt  $fX$  den Raum  $Y$  und sind schließlich die Homologiegruppen von  $f^{-1}y$  (der Urbildmengen der Punkte  $y$  von  $Y$ ) bis zur Dimension  $n$  gleich Null, so induziert  $f$  einen Isomorphismus der Homologiegruppen von  $X$  und  $Y$  bis zur Dimension  $n$ . Ein ähnlicher Satz gilt für beliebige Koeffizientenbereiche. — Das wichtigste Beweismittel ist eine zu  $f$  und zu einer Überdeckung  $M$  von  $X$  und  $N$  von  $Y$  gehörige Kettenabbildung  $t$  des Komplexes  $Y(R)$  in  $X(M)$ , worin  $R$  eine geeignete Verfeinerung von  $N$  ist. Bei  $ft$  geht jedes Simplex von  $Y(R)$  in eine baryzentrische Unterteilung über. Verschiedene Abbildungen  $t$  liefern, unter naheliegenden Voraussetzungen für die zugehörigen Überdeckungen, homologe Ketten.

*K. Reidemeister (Marburg).*

Begle, Edward G.: A fixed point theorem. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 544—550 (1950).

Der Satz „Ist  $Y$  ein azyklischer absoluter Umgebungsretrakt und ist  $f$  eine nach oben halbstetige Abbildung von  $Y$  in sich, welche jedem Punkt  $y$  eine azyklische Untermenge  $f(y)$  in  $Y$  zuordnet, so enthält wenigstens eine Menge  $f(y)$  den Punkt  $y$ “, wird erweitert und nur mit Hilfsmitteln der Homologietheorie (d. h. ohne Homotopieeigenschaften zu benutzen) neu bewiesen. Die Erweiterung besteht einerseits darin, daß an Stelle von Umgebungsretrakten im kleinen zusammenhängende bikompakte Räume  $Y$  treten; die Homologiegruppen derselben sind isomorph zu den Gruppen eines endlichen Komplexes. Daher läßt sich den Abbildungen  $f$  solcher Räume in sich eine Spur  $s(f)$  zuordnen. Die andere Erweiterung ist nun, daß  $Y$  nicht mehr als azyklisch vorausgesetzt, statt dessen aber  $s(f) \neq 0$  gefordert wird. — Der Beweis für die Existenz des Fixpunktes folgt der Anordnung des klassischen Beweises von Lefschetz unter Benutzung des Theorems von Vietoris (siehe oben).

*K. Reidemeister (Marburg).*

Komatu, Atuo: Relations between homotopy and homology. I. Osaka math. J. 1, 150—155 (1949).

Es wird gezeigt, daß die  $n$ -dimensionale Kettengruppe eines einfach zusammenhängenden Komplexes  $K$  isomorph zu der relativen Isomorphiegruppe  $\pi_n(K^n \text{ mod } K^{n-1})$  ist, worin  $K^n$  die „ $n$ -section“ von  $K$  ist. Der Berandungsoperator der Ketten setzt sich aus dem Berandungsoperator der Homotopiegruppen und einer homomorphen Abbildung desselben in die Homologiegruppe zusammen. Durch Anwendung dieser Ergebnisse auf universelle Überlagerungen ergibt sich, daß sich in den Homologiegruppen eines Komplexes zwei charakteristische Untergruppen, nämlich der durch Sphären und der durch geschlossene Homotopieketten induzierten, auszeichnen lassen.

*K. Reidemeister (Marburg).*

Kudo, Tatsuji: Classification of topological fibre bundles. Osaka math. J. 1, 156—165 (1949).

Si  $f$  est une  $F$ -application (c'est-à-dire une application multivalente et continue dans un sens convenable) de l'espace  $B$  dans  $A$ , le graphe  $G$  de  $f$  est muni d'une structure d'espace fibré (dont les fibres  $F$  sont les représentants dans  $G$  des points de  $A$ ). Cette remarque permet de démontrer simplement le théorème (III): Si  $B$  est compact

et si  $F$  est normal (et moyennant des hypothèses de dénombrabilité) l'ensemble des classes d'espaces fibrés de base  $B$  et de fibre  $F$  topologiquement équivalents est en correspondance bi-univoque avec l'ensemble des classes d'homotopie des  $F$ -applications de  $B$  dans  $I^\infty$  (où  $I = [0, 1]$ ). — L'A. reprend ensuite, de ce point de vue, certains problèmes classiques de la théorie des espaces fibrés: trivialité des espaces fibrés dont la base est contractile en un point, groupes d'homotopie, classification. Le théorème V contient le théorème de J. Feldbau sur la classification des espaces fibrés dont la base est la sphère  $S_n$ . Reeb (Strasbourg).

**Wang, Hsien-Chung:** A new characterisation of spheres of even dimension. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 838—847; Indag. math., Amsterdam 11, 286—295 (1949).

Détermination des espaces homogènes simplement connexes  $W = G/G'$  des groupes de Lie compacts et dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est un nombre premier  $p$ ; en particulier l'A. montre que les seuls cas où  $G$  est effectif et transitif sur  $W$  de caractéristique 2 sont  $B_n/D_n = S_{2n}$  et  $G_2/A_2 = S_6$  donc  $W$  est automatiquement une sphère. Les démonstrations partent d'un théorème de Hopf et Samelson disant que si  $\chi(W) \neq 0$ ,  $G$  et  $G'$  ont même rang et  $\chi(W) = o(\Phi(G))/o(\Phi(G'))$  [ $o(\Phi(G))$  = ordre du groupe quotient par un tore maximal de  $G$  du normalisateur de ce tore]. — Les résultats de l'A. ont été aussi obtenus de manière analogue par le rapp. (ce Zbl. 34, 16). La détermination effective des cas où  $\chi(W) = p$  utilise une étude des sous-groupes de rang maximum des groupes de Lie compacts, faite par l'A. pour les groupes classiques (ce Zbl. 35, 297) et pour tous les groupes de Lie compacts par A. Borel et J. de Siebenthal (ce Zbl. 34, 307). — Erratum: Dans le théorème III, il manque l'espace  $G_2/D_2$  de caractéristique 3. A. Borel (Zürich).

**Scorza Dragoni, Giuseppe:** Alcune proprietà di struttura per certi insiemi di punti. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 221—229 (1949).

Es handelt sich, allgemein gesprochen, um das Problem, topologische Eigenschaften einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge  $B$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $E^n$  zu erschließen aus topologischen Eigenschaften eines Teilsystems ihrer  $k$ -dimensionalen linearen Schnitte,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $n \geq 2$ . Hier speziell betrachtet Verf. die Schnitte von  $B$  mit einer Teilgesamtheit  $\mathfrak{S}$  paralleler  $k$ -dimensionaler linearer Teilräume  $E^k$ , welche einen  $B$  umfassenden Teil des Gesamttraumes  $E^n$  einfach überdecken: jeder Durchschnitt  $BE^k$ ,  $E^k \in \mathfrak{S}$ , sei dabei nicht leer. Als Schnitteigenschaft wird die folgende Art von „Schnittstetigkeit“ untersucht:  $B$  heißt  $\mathfrak{S}$ -stetig bei  $E_0^k$ , wenn folgendes gilt: Ist  $C$  ein abgetrennter, nicht leerer Teil des Durchschnitts  $BE_0^k$  („abgetrennt“ heißt:  $C$  und  $BE_0^k - C$  sind beide abgeschlossen), so strebt der Abstand zwischen  $BE^k$  und  $C$  gegen Null, wenn  $E^k$  in  $\mathfrak{S}$  gegen  $E_0^k$  strebt. Zur Vorbereitung des Problems, aus der  $\mathfrak{S}$ -Stetigkeit von  $B$  auf Zusammenhangseigenschaften von  $B$  zu schließen, werden einige Eigenschaften  $\mathfrak{S}$ -stetiger Mengen  $B$  entwickelt. In Zusammenhang mit den dabei zur Verwendung kommenden  $\varrho$ -Ketten und  $\varrho$ -Komponenten ( $\varrho > 0$ ) führt Verf. eine „unscharfe“ Stetigkeit ein:  $B$  heißt bei  $E_0^k$  ( $\varrho, \mathfrak{S}$ )-stetig, wenn bei beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  der oben genannte Abstand kleiner wird als  $\varrho + \varepsilon$ , sobald  $E^k$  hinreichend nahe bei  $E_0^k$  liegt. Aumann (Würzburg).

**Fort jr., M. K.:** A proof that the group of all homeomorphisms of the plane onto itself is locally arcwise connected. Proc. Amer. math. Soc. 1, 59—62 (1950).

$P$  désignant le plan, et  $H(P)$  l'ensemble de toutes les homéomorphies de  $P$  en lui-même, on sait que  $H(P)$  devient un groupe topologique si l'on y introduit une topologie convenable [R. F. Arens, Amer. J. Math. 68, 593 (1946)]. L'A. démontre que  $H(P)$  est localement „connexe par arcs“, c'est-à-dire que pour chaque  $f \in H(P)$  il existe un voisinage  $V(f) \subset H(P)$  tel que chaque  $g \in V(f)$  peut être joint à  $f$  par un arc simple contenu dans  $H(P)$ .  $H(P)$  étant un groupe topologique,

il suffit de le démontrer pour son élément-unité  $I$ . L'A. y arrive en construisant une isotopie  $B_t \in H(P)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $B_0 = f$ ,  $B_1 = I$ , correspondant à chaque  $V(I)$ .  
*Calugareanu (Cluj).*

**Dolcher, Mario:** *Geometria delle trasformazioni continue. I: Sopra un teorema di Radó.* Pubbl. Fac. Sci. Ing. Univ. Trieste, Ser. B. Nr. 29, 18 p. (1948).

En s'appuyant sur les théorèmes fondamentaux de la Topologie du plan (th. de Jordan, propriétés de l'indice topologique  $O(Q, \Gamma)$  d'une courbe fermée  $\Gamma$  relativement à un point  $Q$ ), l'A. établit d'abord le lemme suivant:  $C^*$  étant une courbe fermée simple,  $C$  le domaine intérieur à celle-ci,  $G$  un ensemble fermé  $\subset C$ ,  $H$  un ens. fermé  $\subset \bar{C}$ ,  $G \subset H$ , et  $K$  un ens. fermé  $\subset C$ ,  $K \cdot G = 0$ , tel que  $K$  sépare de  $C^*$  une composante  $G_0$  de  $G$  et  $K \cdot H$  se réduise à un nombre fini  $\nu$  de points, alors: quelque soit  $\delta > 0$ , il existe une courbe simple  $\gamma^*$  telle que:  $\gamma^* \subset C$ ,  $\gamma^* \cdot G = 0$ , et  $\gamma^*$  contourne  $G_0$ ; chaque point de  $\gamma^*$  est à une distance  $< \delta$  de  $K$ ; enfin,  $\gamma^* \cdot H$  est contenu sur  $\nu$  arcs de  $\gamma^*$  au plus, deux à deux disjoints et de diamètre  $< \delta$ . Ce lemme permet à l'A. de démontrer ce théorème:  $\Phi$  étant une transformation continue de la région simple  $\bar{C}$  (de contour  $C^*$ ) du plan  $\pi$ , sur le plan  $\pi'$ , s'il existe sur  $\pi'$  un point  $Q_0 \in \Phi(C)$  tel que l'ens. fermé  $G = \Phi^{-1}(Q_0)$  possède une composante  $G_0$  dominant lieu à  $O(Q_0, \Phi(\gamma^*)) \geq n(Q_0) = O(Q_0, \Phi(C^*))$  pour toute courbe simple  $\gamma^* \subset C$ ,  $\gamma^* \cdot G = 0$ ,  $\gamma^*$  contournant  $G_0$ , alors,  $g_0$  étant le domaine maximum contenant  $Q_0$  sans rencontrer  $\Phi(C^*)$ , on a, pour chaque  $Q \in g_0$ ,  $\mu(Q) \geq n(Q_0)$ , en désignant par  $\mu(Q)$  le nombre des points dont se compose  $\Phi^{-1}(Q)$ . Ce théorème contient comme cas particulier un théorème de Radó [Fundam. math. 27, 201 (1930)]. Il permet d'étendre la notion de point de ramification aux transformations continues du plan. Un théorème de Kronecker, d'après lequel  $n(Q) \geq 1$  attire  $\mu(Q) \geq 1$ , est démontré par voie analogue, mais sans user du Lemme. Enfin, ces deux théorèmes permettent à l'A. d'en déduire le théorème suivant de L. Cesari: Si pour un point  $Q_0$  de  $\pi'$  on a  $n(Q_0) > 0$ , il existe un voisinage  $V(Q_0)$  tel que pour  $Q \in V(Q_0)$  on a  $\mu(Q) \geq n(Q_0)$ . Ces démonstrations évitent l'emploi de la transformation  $z = w^n$  ( $z$  et  $w$  étant des variables complexes) utilisée par Radó et Cesari.

*Calugareanu (Cluj).*

**Scorza Dragoni, Giuseppe:** *Sugli autoomeomorfismi del piano privi di punti uniti.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 1—53 (1949).

L'A. se propose de voir quel parti on peut espérer tirer des propriétés des translations planes généralisées pour l'étude d'un problème généralisant le dernier théorème géométrique de Henri Poincaré. L'article donne un résumé des principales propriétés connues des translations planes généralisées, ainsi qu'une bibliographie très abondante sur le sujet traité.  
*Reeb (Strasbourg).*

**Niven, Ivan:** *Extension of a topological proof of the fundamental theorem of algebra.* Amer. math. Monthly 57, 246—248 (1950).

Soit  $f(z) = z a_1 z a_2 \cdots z a_n + \varphi(z)$  un „polynôme“ non commutatif où  $z$  et les  $a_i$  sont des quaternions réels, et  $\varphi(z)$  une somme de „monômes“ semblables au premier terme de  $f$ , mais de degré  $< n$ . L'A. donne une nouvelle démonstration du fait, établi antérieurement par lui et Eilenberg [Bull. Amer. math. Soc. 50, 246—248 (1944)] que  $f(z) = 0$  a au moins une racine. La méthode, comme la précédente, est topologique: elle consiste à former une application continue  $z \rightarrow g(z)$  d'une boule  $|z| \leq R$  de rayon assez grand dans elle-même, telle que l'équation  $g(z) = z$  équivale à  $f(z) = 0$ .  
*J. Dieudonné (Nancy).*

**Tutte, W. T.:** *The factorization of locally finite graphs.* Canadian J. Math. 2, 44—49 (1950).

Sei  $G$  ein (endlicher oder unendlicher) nicht notwendig zusammenhängender Graph endlichen Grades. (Letztere Bedingung bedeutet, daß in jedem Knotenpunkt von  $G$  nur eine endliche Anzahl von Kanten endigt.) Ein Faktor ersten Grades



des Graphen  $G$  ist eine solche Teilmenge seiner Kanten, daß jeder Knotenpunkt von  $G$  der Endpunkt genau einer Kante aus der Menge ist. Als Verallgemeinerungen für endliche Graphen schon früher gewonnener Resultate (dies. Zbl. 29, 233) beweist Verf. folgende Sätze:  $G$  enthält dann und nur dann keinen Faktor ersten Grades, wenn die Anzahl der endlichen zusammenhängenden Teilgraphen mit ungerader Knotenpunktanzahl, in die  $G$  durch Streichung einer geeigneten endlichen Knotenpunktmenge  $S$  (und der Kanten, die in Knotenpunkten aus  $S$  endigen) zerfällt, größer ist als die Anzahl der Knotenpunkte in  $S$ . — Ist  $G$  ein zusammenhängender regulärer Graph des endlichen Grades  $s$  mit gerader oder unendlicher Knotenpunktanzahl, so besitzt er gewiß einen Faktor ersten Grades, wenn sein Zusammenhang nicht durch Streichung von weniger als  $s-1$  Knotenpunkten zerstört werden kann. Überdies gehört jede Kante eines solchen Graphen  $G$  zu einem Faktor ersten Grades von  $G$ . T. Szele (Debrecen).

## Klassische theoretische Physik.

### Mechanik:

**Bilimović, Anton:** Anwendung der Pfaffschen Methode auf die Theorie der uniformisierenden kanonischen Variablen. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 67—80 und russische Zusammenfassg. 80—81 (1948) [Serbisch].

Wenn für verallgemeinerte Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des Systems und die entsprechenden Impulse  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) der Pfaffsche Ausdruck die Form  $\Phi = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt$

hat, wobei  $H = H(p_i, q_i)$ , so sind die Veränderlichen  $p_i, q_i$  kanonisch, weil die Pfaffschen Gleichungen die Form kanonischer Gleichungen haben. — Eine Koordinate, z. B.  $q_n$ , von der die Funktion  $H$  nicht abhängt, heißt zyklisch, ihr entspricht das Integral (\*)  $p_n = \text{const.} = \beta_n$ . Wenn die Ableitung  $\partial H / \partial p_n = v_n$  einen konstanten Wert hat, so entspricht dem Integral (\*) das Integral  $q_n = v_n t + \alpha_n$ , wo  $\alpha_n$  eine neue beliebige Konstante ist. In diesem Fall nennt man  $q_n$  und die entsprechende Impulskoordinate uniformisierende Koordinaten; sie werden im Folgenden mit  $w_i$  und  $I_i$  bezeichnet. — Das Aufsuchen der uniformisierenden Koordinaten wird auf folgende Transformation des Pfaffschen Ausdrucks zurückgeführt:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H(p_i, q_i) dt \approx \sum_{i=1}^n I_i dw_i - H(I_i) dt,$$

worin das Zeichen  $\approx$  die Äquivalenz der Formen in dem Sinne bezeichnet, daß man äquivalente Pfaffsche Gleichungen erhält. — Einfache Überlegungen führen zu den folgenden Formeln zur Bestimmung der uniformisierenden Koordinaten, etwa im Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrade, wenn das Integral der Erhaltung der Energie  $H(p, q) = h$  gilt:

$$(**) \quad I = 1/2\pi \oint p dq = I(h), \quad w = \frac{\partial H}{\partial I} t + \alpha,$$

das Integral erstreckt über eine Periode der periodischen Bewegung. Bei Benutzung der Pfaffschen Methode erkennt man sofort, daß das Integral in (\*\*) ersetzt werden kann durch  $(2\pi)^{-1} \oint \frac{1}{2} (p dq - q dp)$ . Das folgt unmittelbar daraus, daß  $p dq$  in dem Pfaffschen Ausdruck durch das äquivalente  $\frac{1}{2} (p dq - q dp)$  ersetzt werden kann. Die Differenz dieser Ausdrücke ist ein vollständiges Differential  $\frac{1}{2} d(pq)$ . — Verf. betrachtet auch den Fall mehrerer Freiheitsgrade und zeigt die Anwendung des Pfaffschen Methode an zwei Beispielen: dem kanonischen Oszillator und der Kepler-Bewegung. In dem letzten Problem sind die fünf uniformisierenden Veränderlichen und die Konstante in dem Ausdruck für die sechste nichts anderes als die bekannten Elemente von Delaunay der Planetenbewegung. (Aus der russischen Zusammenfassung.)

**Cotton, Émile:** Sur certains rapprochements entre la géométrie des espaces de Riemann et la mécanique rationnelle classique. Bull. Soc. math. France 76, 1—19 (1948).

L'A. donne une présentation nouvelle de l'isomorphisme classique entre un système matériel  $S$  à liaisons holonomes indépendantes du temps et l'espace riemannien  $R$  associé à sa force vive. Un système de vecteurs attachés aux différents points  $M$  de  $S$  est dit régulier lorsque le vecteur  $\vec{v}$  attaché au point  $M$  de  $S$  est de

la forme

$$\vec{v} = \sum \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i} X^i \quad (u^i \text{ paramètres de } S)$$

les  $X^i$  étant les mêmes pour tous les points de  $S$ ; les  $X^i$  définissent un vecteur  $\vec{X}$  de  $R$ . Une définition classique de l'équivalence de deux systèmes de vecteurs est rappelée.

Cela posé, les différentielles géométriques  $\vec{d}\vec{v}$  du système de vecteurs de  $S$  considéré ne forment pas en général un système régulier, mais il existe un système régulier équivalent auquel correspond un vecteur  $d\vec{X}$  de  $R$ :  $d\vec{X}$  est la différentielle absolue du vecteur  $\vec{X}$ . L'équivalence de cette définition et de la définition habituelle est mise en évidence. L'A. conduit ses calculs, non de la manière classique, mais en faisant intervenir les formes de Pfaff de Elie Cartan ou, ce qui est équivalent, les caractéristiques au sens de Volterra [Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 33, 18 (1897)]. Les équations du mouvement de  $S$  sont écrites dans ce formalisme. Les résultats sont ensuite étendus au cas où les liaisons sont quelconques, le formalisme employé rendant cette extension très simple. Diverses applications, notamment à l'hydrodynamique, terminent ce papier.

Lichnerowicz (Paris).

<sup>8</sup> Pailloux, Henri: Sur certains systèmes non holonomes. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1501—1504 (1950).

Es wird ein Verfahren angegeben, die Bewegungsgleichungen nichtholonomen Systeme aufzustellen für den Fall, daß die nichtholonomen Bedingungsgleichungen  $\varphi_k(q, \dot{q}, t) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  nichtlinear sind in den generellen Geschwindigkeiten  $\dot{q}_v$ . Vorausgesetzt wird, daß die Bedingungen vollständig (parfaites) seien, d. h. daß die Bindungsarbeit für jede, mit den Bedingungsgleichungen verträgliche virtuelle Verrückung des Systems gleich Null ist. Behandelt werden die Fälle, daß die Bedingungsgleichungen von den ersten bzw. von den zweiten zeitlichen Ableitungen  $\dot{q}_v$ ,  $\ddot{q}_v$  der generellen Koordinaten abhängen.

Hardtwig (München).

Giorgi, Giovanni: Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 175—178 (1950).

Die Newtonsche Grundgleichung der Mechanik wird als Gleichung zwischen Motoren aufgefaßt, und so kann einheitlich durch Summation der Schwerpunkts- und der Momentensatz gewonnen werden.

Hamel (Landshut).

Železeov, N. A.: Die Methode der Punkttransformation und das Problem der erzwungenen Schwingungen eines Oszillators mit „kombinierter“ Reibung. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 3—40 (1949) [Russisch].

L'A. étudie le mouvement de l'oscillateur à un degré de liberté  $x$ , dont l'équation différentielle s'écrit: (1)  $m\ddot{x} = -kx + F + G$ ;  $m$  et  $k$  sont des constantes;  $G(t)$  une fonction bornée, discontinue de 1<sup>re</sup> espèce, périodique, du temps;  $F[x, \dot{x}, G(t)]$  satisfait aux conditions suivantes: 1. si  $\dot{x} \neq 0$ ,  $F \equiv f(\dot{x})$ ,  $f$  étant lipschitzienne, monotone décroissante; 2. pour  $\dot{x} = 0$ ,  $F$  est discontinue:  $F(x, 0, G)$  vérifie les lois habituelles du frottement statique et, en outre,

$$f(+0) \leq F(x, 0, G) \leq f(-0).$$

Il s'en suit qu'en choisissant convenablement  $F$ , on retombe sur le cas classique et important d'un oscillateur linéaire, soumis à une force périodique  $G(t)$  et à la force de rappel  $-kx$ , et comportant, de plus, des résistances passives coulombienne et visqueuse. — L'A. se propose l'étude des solutions continues de (1): allure pour  $t = \infty$ ; existence, unicité et stabilité (au sens large) des solutions périodiques. C'est par la généralité des hypothèses faites sur  $F$  et sur  $G$ , par la rigueur des raisonnements employés que le présent mémoire se distingue des travaux antérieurs, dont l'A. fait une substantielle analyse et dont il donne une bibliographie assez étendue. — Le chapitre I est consacré surtout à la démonstration des deux théorèmes: 1. Si:  $\text{Max } G - \text{Min } G \leq k[f(-0) - f(+0)]$ , il existe des états de repos tels que

$\text{Max } G + f(+0) \leq x \leq \text{Min } G + f(-0)$ . Un mouvement quelconque de l'oscillateur tend, pour  $t \rightarrow \infty$ , vers un état de repos. — 2. Si: (2)  $\text{Max } G - \text{Min } G > k [f(-0) - f(+0)]$ , et s'il existe une solution  $X(t)$  de (1), bornée, périodique [de période égale à celle de  $G(t)$ ], toute autre solution de (1) tend, pour  $t \rightarrow \infty$ , vers  $X(t)$  et reste bornée pour  $t \leq \infty$ ; s'il existe une solution de (1) non bornée, il en sera de même de toutes les autres. — L'A. forme alors une condition suffisante pour que  $|x(t)| \leq \text{borne}$ , en complétant (2) par  $f(x) = -\infty$ . Pour  $f(-\infty) > -\infty$ , il construit des contre-exemples. — Le chapitre s'achève par l'examen détaillé du cas „symétrique“, où  $G(t)$  est symétrique et où  $F(x, -x, G) = -F(x, x, G)$ ; pas les solutions périodiques sont alors symétriques, mais les états de repos ne le sont toujours. C'est ici, principalement, que les résultats de l'A. recourent ceux de den Hartog (Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 1931). Au chapitre II, l'A. discute minutieusement le cas où  $G(t) = G_0 \text{sgn}(\sin 2t/T)$ ,  $G_0$  étant une constante et où  $F$  se réduit à une superposition des frottements coulombien et visqueux. Il dégage les conclusions relatives au fonctionnement du système propres à rendre service aux techniciens. *J. Kravtchenko (Grenoble).*

**Fogagnolo Massaglia, Bruna:** Sulla stabilità di una configurazione di equilibrio di un sistema a due gradi di libertà. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I. 83, 62—69 (1949).

Es soll bewiesen werden, daß die Gleichgewichtslage eines Systems von zwei Freiheitsgraden instabil ist, wenn zwei der charakteristischen Exponenten imaginär, die beiden anderen null sind. Zuerst wird der Fall behandelt, daß das Potential längs einer Linie  $y = f(x)$  von zweiter Ordnung verschwindet, sonst positiv ist. Das steht schon unter allgemeineren Voraussetzungen in einer Note des Ref. [Math. Ann. 57, 541—553 (1903)]. Dann wird der Fall behandelt, daß das Potential längs zwei getrennten Linien null ist, also in die Form  $XY G(X, Y)$  mit positivem  $G$  transformiert werden kann. Aber das ist doch noch länger bekannt, und außerdem sind die charakteristischen Exponenten teilweise negativ. *Hamel (Landshut).*

**Fogagnolo Massaglia, Bruna:** Sugli esponenti caratteristici relativi ad una configurazione di equilibrio di un sistema a due gradi di libertà. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I., 83, 70—81 (1949).

Bei einem System von zwei Freiheitsgraden seien die kinetische Energie, die potentielle Energie und die Dissipationsfunktion quadratische Formen mit konstanten Koeffizienten. Außerdem können gyroskopische Terme vorhanden sein. Es werden die hinreichenden Bedingungen für die Stabilität im strengen Sinne, d. h. charakteristische Exponenten mit negativem Realteil abgeleitet, die man erwartet. Die Stabilisierung an sich instabiler Systeme durch die gyroskopischen Terme bei Abwesenheit einer Dissipation fallen also fort. *Hamel (Landshut).*

**Dolgolenko, Ju. V.:** Bemerkungen zu der Arbeit von G. V. Aronovič „Zur Theorie des Jimmy eines Automobils und Flugzeugs“. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 449—451 (1950) [Russisch].

Bemerkung zu der dies. Zbl. 34, 405 besprochenen Arbeit.

### Elastizität. Plastizität. Akustik:

● **Flügge, W., R. Grammel, K. Klotter, K. Marguerre und G. Mesmer:** Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Ausgewählte Kapitel aus der Elastomechanik. Herausgegeben von K. Marguerre. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VIII, 253 S., geb. DM 25,50.

Das Buch enthält eine zusammenfassende und in vieler Hinsicht grundlegende Darstellung einer Reihe von Problemen und Methoden der neueren Ingenieur-Mechanik nach folgender Gliederung: 1. G. Mesmer, Experimentelle Verfahren zur Bestimmung mechanischer Spannungen, 2. K. Marguerre, Die Grundbegriffe der Elastizitätslehre, 3. W. Flügge, Die Festigkeit von Schalen, 4. K. Klotter, Schwingungserscheinungen im Bau- und Maschinenwesen, 5. R. Grammel, Ver-



fahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme, 6. K. Marguerre, Knick- und Beulvorgänge. Sachverzeichnis. Aus dem reichen Inhalt möchte der Ref. hier nur auf die Abschnitte über das Prinzip der virtuellen Arbeiten und der virtuellen Kräfte und deren Unterscheidung in 2 und auf die Darstellung der Methoden zur Lösung von Eigenwertproblemen für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden und für kontinuierliche Systeme in 5 hinweisen. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

● **Pflüger, Alf: Stabilitätsprobleme der Elastostatik.** Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VIII, 339 S. mit 389 Abb.; DM 34,50.

Nach dem Vorwort des Verf. soll das Buch eine lückenlose und leicht verständliche Zusammenfassung der elastostatischen Stabilitätsprobleme geben. Der Fortschritt, der auf diesem Sondergebiet der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen in den letzten 10—15 Jahren erreicht worden ist, besteht einerseits in der Fülle gelöster Einzelprobleme, die im Anhang als Formelzusammenstellung für kritische Werte von Verzweigungsproblemen der Stabknickung, Plattenbeulung und Schalenbeulung mit einem Literaturverzeichnis auf rund 90 Seiten tabellarisch und graphisch besonders berücksichtigt sind; andererseits in der Durcharbeitung der Methoden, die grundsätzlich bei der Behandlung von Stabilitätsproblemen in Frage kommen. Diese eigentliche Theorie der Stabilitätsprobleme ist in den Abschnitten II—IV dargestellt, nachdem im I. Abschnitt am Beispiel der Stabknickung die Eigenart der verschiedenen Stabilitätsprobleme ausführlicher behandelt wird; Mehrdeutigkeit in der funktionalen Abhängigkeit zwischen Belastungen und Verschiebungen kann dadurch zustande kommen, daß die Kraft-Verformungskurve einen Extremwert hat (Durchschlagprobleme) oder daß von dieser Kurve bei höheren Belastungen weitere Lösungen als mögliche Kraft-Verformungskurven abzweigen (Verzweigungsprobleme) oder endlich, daß schon im spannungslosen Zustand eine benachbarte Gleichgewichtslage möglich ist (statisch bestimmte Stabilitätsprobleme). Diese Beispiele zeigen bereits die für die Stabilitätstheorie charakteristische Notwendigkeit, bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Verformung des Systems zu berücksichtigen. Zur exakten Lösung von Stabilitätsproblemen kommen die Gleichgewichtsmethode und die Energiemethode (Prinzip der virtuellen Verrückungen) in Frage. Bei ihrer Behandlung (Abschn. II) werden Temperaturänderungen des elastischen Systems miterörtert. In Abschn. III werden für die Gleichgewicht- und für die Energiemethode die Kriterien für die drei Arten des Gleichgewichts aufgestellt. Abschn. IV bringt für zwei- und dreidimensionale Probleme die mathematischen Grundbegriffe zur Beschreibung des Spannungs- und Verzerrungszustandes, wobei die Spannungen nach dem Vorbild von R. Kappas auf den unverformten Zustand bezogen werden. Dies führt zu einer Definition der Spannungs- und Verzerrungsgrößen, die bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes einen nicht linearen Zusammenhang der Spannungen und Dehnungen bedingen. Die drei folgenden Abschnitte sind der konkreten Lösung von Stabilitätsproblemen gewidmet, die die Ausbildung von Näherungsmethoden erfordert. Das Näherungsverfahren für Verzweigungsprobleme besteht einmal darin, daß man sich bei der Lösung eines Stabilitätsproblems auf die Ermittlung der kritischen Last beschränkt, andererseits darin, die Verformungen des Grundzustandes zu vernachlässigen. Mit dieser Methode wird u. a. die Rahmenknickung, die Beulung von Rechteckplatten und Kreiszylinderschalen behandelt. Abschnitt VI diskutiert die Gültigkeitsgrenzen des Näherungsverfahrens. Abschnitt VII setzt die Theorie der Näherungslösungen fort und behandelt ausführlicher die Methode von Ritz im Rahmen der mathematischen Theorie und das Verfahren von Galerkin zur Lösung von Eigenwertproblemen, ferner numerische Integration und die Methode der schrittweisen Näherung; endlich werden die wichtigsten Vergleichssätze abgeleitet über die Abhängigkeit der Eigenwerte von der Steifigkeit des Systems und über die kritische Last eines Systems mit verschiedener Steifigkeit bzw. verschiedener Belastung der Teilsysteme (Formeln von Southwell und Dunkerly). Ein besonderer Abschnitt VIII befaßt sich mit der Diskussion der praktischen Bedeutung der Stabilitätstheorie und der Aufdeckung der Ursachen, die vielfach zu schlechter Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung führen. Die mathematischen Hilfsmittel sind in dem Buch in dem Umfang entwickelt, wie sie gebraucht werden. Am Kopf jedes Abschnitts findet sich eine kurze Übersicht und am Schluß jedes Abschnitts eine Zusammenfassung. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Signorini, A.: Trasformazioni termoelastiche finite. II.** Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 1—72 (1949).

Im Anschluß an frühere Veröffentlichungen [Atti Convegno Mat. 1942 (Roma, Bardi 1945), 153—168; Proc. 7th. internat. Congr. appl. Mech. 4, 237—247] entwickelt Verf. die Grundlagen der thermoelastischen Deformation bei endlichen Verschiebungen. Die Gleichgewichts- und Oberflächenbedingungen für den deformierten Körper werden mittels Tensorschreibweise angegeben. Spannungs-komponenten und spezifische Entropie werden für adiabatische und isotherme Zustandsänderungen auf ein thermodynamisches Potential zurückgeführt. Nach Spezial-

sierungen für den vollkommen elastischen sowie für den homogenen und isotropen Körper folgen Eindeutigkeitsuntersuchungen des isothermen elastostatischen Zustandes, wobei sich Verf. einer Potenzreihenentwicklung nach einem Parameter bedient, der mit den Oberflächenbedingungen und den Volumkräften im Zusammenhang steht. Eine solche Entwicklung wird in der klassischen Elastizitätstheorie meist stillschweigend vorausgesetzt; bei Fragen des indifferenten Gleichgewichtes beschäftigt man sich in der Regel nur mit dem ersten und zweiten Glied. [Eine derartige Entwicklung ist insbesondere in der Theorie der elastischen Stabilität vielfach gebräuchlich, vgl. z. B. E. A. Deuker, *Z. angew. Math. Mech.* **23**, 81 (1943); Bem. d. Ref.] Auch Verf. setzt die Entwickelbarkeit voraus, erstreckt seine Betrachtungen jedoch auf alle zu den einzelnen Gliedern der Potenzreihe gehörenden Teillösungen (Hilfssysteme) und gelangt so zu einer Erweiterung des Bettischen Theorems. Nach Betrachtungen über Störungen des Körperzusammenhangs (Inkompatibilität) berührt Verf. die Frage der Darstellbarkeit des elastischen Potentials durch die Invarianten des räumlichen Dehnungstensors. Nach allgemeinen Betrachtungen über das isotherme elastische Potential werden folgende Spezialfälle durchgerechnet: 1. allseitig gleichmäßiger Zug (bzw. Druck); 2. einachsiger Zug (bzw. Druck); 3. gerader Kreiszylinder unter gleichmäßigem Zug (bzw. Druck) längs der Mantelfläche; 4. Biegung und Zug (bzw. Druck) einer Rechteckplatte.

H. Neuber (Dresden).

Edelman, F.: On the compression of a short cylinder between rough end-blocks. *Quart. appl. Math.* **7**, 334—337 (1949).

Ein durch zwei parallele Ebenen abgeschnittener Kreiszylinder (Höhe  $2h$ , Querschnitt  $A$ ) sei zwischen zwei Blöcken eingespannt unter der Annahme, daß Gleiten durch die Reibung verhindert wird. Es soll die Beziehung zwischen der wirkenden Kraft  $F$ , der Zusammendrückung  $2a$  und dem Elastizitätsmodul bei bekannter Poissonzahl ermittelt werden. Ohne Reibung ist  $E = (F \cdot h)/(A \cdot a)$ , mit Reibung sei der Modul  $\bar{E}$ . Zur Herleitung der bei vorhandener Reibung anzubringenden Korrektur wird die von Prager und Synge (dies. Zbl. **29**, 235) angegebene Methode benutzt. Das Problem wird zunächst in zwei einfachere Teilprobleme zerlegt. Das erste ist die einfache Zusammendrückung, das zweite läßt sich auf ein bereits gelöstes ebenes Problem (s. H. J. Greenberg und R. Truett, dies. Zbl. **29**, 281) zurückführen und wird dem ersten überlagert. Verf. beschränkt sich auf die Angabe der Resultate der beiden Arbeiten und ihre Anwendung auf das vorliegende Problem. Es ergibt sich mit weniger als 0,7% Fehler  $E = 0,9477 \bar{E}$ . Reutter (Karlsruhe).

Reissner, Eric: Note on the problem of twisting of a circular ring sector. *Quart. appl. Math.* **7**, 342—347 (1949).

Verf. beschäftigt sich mit dem Torsionsproblem eines Kreisringsektors von beliebigem Querschnitt, das auch im Hinblick auf die Berechnung von Spannungen und Deformationen in eng gewickelten Spiralfedern von Interesse ist. Die Arbeit gibt Resultate zur Behandlung der Verdrillung dünnwandiger Hohlquerschnitte von Kreisringsektoren unter Heranziehung der Membrantheorie dünner Schalen. In Zylinderkoordinaten  $r, \theta, z$  sind die Verschiebungen  $U = 0$ ,  $V = V(r, z)$ ,  $W = k\theta$ . Die erhaltenen Formeln für  $S$  (Spannungsergebnisse der Scherspannungen) und  $k$  sind das Gegenstück zu den aus der Torsionstheorie bekannten Formeln von Bredt für das Problem der St. Venantschen Torsion dünner Stäbe bzw. geschlossener dünnwandiger Querschnitte. — Als Beispiele werden der kreisförmige und der rechteckige Querschnitt mit konstanter Wandstärke behandelt. Reutter (Karlsruhe).

Aleck, B. J.: Thermal stresses in a rectangular plate clamped along an edge. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 118—122 (1949).

Verf. ersetzt zunächst die in Richtung der  $X$ -Achse (Einspannung) infolge der Erwärmung auftretende Dehnung durch eine gleich große, durch eine Normalspan-



nung  $\sigma_x$  verursachte, die längs der  $y$ -Achse (freie Kanten) als konstant angenommen wird. Mittels des an sich willkürlichen Ansatzes  $\sigma_x = f_1(x) + y f_2(x) + y^2 f_3(x)$  gewinnt er aus den beiden Gleichgewichtsgleichungen des ebenen Problems analog gebaute Ausdrücke für die beiden übrigen Spannungen  $\tau_{xy}$  und  $\sigma_y$ , wobei er sofort auch die Randbedingungen an der der Einspannungskante gegenüberliegenden freien Seite ( $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$ ) erfüllen kann. Nach Einführung der Ausdrücke für  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$  in den für die Formänderungsarbeit, der zu einem Minimum gemacht werden soll, liefert die Durchführung der Variation [man vgl. hierzu die Arbeiten E. Reissners, J. aeronaut. Sci. 8, 284—291 (1941); Quart. appl. math. 4, 268—278 (1946); Quart. appl. math. 5, 55—68 (1947); dies. Zbl. 30, 43] hinsichtlich der  $f_i$  und deren Ableitungen nach  $x$  drei homogene lineare simultane Differentialgleichungen, deren verschwindende Systemdeterminante nach Einführung der Ansätze  $f_1 = A e^{\lambda x}$ ,  $f_2 = B e^{\lambda x}$ ,  $f_3 = C e^{\lambda x}$  für  $w = \lambda^2$  eine Gleichung 6. Grades mit zwei reellen und zwei konjugiert komplexen Wurzeln ergibt. — Verf. zeigt an Hand von Schaubildern für den Verlauf der Spannungen, daß die so ermittelte Näherungslösung die vorgeschriebenen Randbedingungen hinreichend genau erfüllt. Karas (Darmstadt).

Reissner, Eric: On finite deflections of circular plates. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1. (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non-linear problems in mechanics of continua), 213—219 (1949).

Verf. betrachtet elastische rotationssymmetrische Deformationen einer kreisförmigen hinreichend dünnen Platte im Bereich kleiner Verzerrungen, aber beliebiger Verschiebungen und Verwölbungen, d. h. er vernachlässigt die Quadrate von  $\epsilon_r$  und  $\epsilon_\theta$  gegen erste Potenzen dieser Größen, aber nicht die Quadrate der Verschiebungen und Verschiebungsableitungen gegen deren erste Potenzen. Verzerrungen und Spannungen werden am verformten Element berechnet und die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungsergebenden nach sinngemäßer Interpretation aus der Theorie der infinitesimalen Deformationen von Umdrehungsschalen übernommen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen, den Verträglichkeitsbedingungen und dem Hookeschen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Formänderungsgrößen ergibt sich ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Horizontalkomponente  $H$  der Spannungsergebenden und den Winkel  $\Phi$ , den die Flächennormale mit der  $r$ -Richtung bildet. Durch  $H$ ,  $\Phi$  und  $r$  lassen sich alle charakteristischen Formänderungs- und Spannungsgrößen des Problems ausdrücken. Die Differentialgleichungen gehen bei Vernachlässigung dritter und höherer Potenzen von  $H$  und  $\Phi$  in die bekannten Gleichungen der Theorie kleiner endlicher Formänderungen kreisförmiger Platten über. In Analogie zur Belastung spannungsfreier Umdrehungsschalen durch Randkräfte besteht auch hier der „Randeffekt“; durch Vernachlässigung von  $H$  und  $\Phi$  gegen ihre Ableitungen erhält Verf. aus den genannten Differentialgleichungen für diese Funktionen ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Gleichungen von K. O. Friedrichs und J. J. Stoker (dies. Zbl. 26, 163) auf den Fall endlicher Verwölbungen verallgemeinern, die bei genügend dünnen Platten mit infinitesimalen Verzerrungen verträglich sind. Moufang (Frankfurt a. M.).

Zanaboni, Osvaldo: Azioni interne e deformazioni intorno ad un punto nelle lastre a doppia curvatura. Ann. Triestini, Univ. Trieste, Sez. 2 17, 73—83 (1947).

Die Beanspruchung eines Elements der Mittelfläche einer gekrümmten Platte, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz ( $i, j$ ) in der Tangentialebene wird umgerechnet auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz ( $u, v$ ) in dieser Ebene. Die zehn Größen: Biegemoment  $M$ , Torsionsmoment  $L$ , Längskraft, Schubkraft  $Q$  und Querkraft je in der  $u$ - und  $v$ -Richtung sind nicht unabhängig, da die Komponenten von  $Q$ ,  $L$  und  $M$  durch eine Beziehung verknüpft sind, in die die Hauptkrümmungen der Fläche in dem betreffenden Punkt eingehen. Die neun unabhängigen Beanspruchungsparameter eines Elements der Mittelfläche, bezogen auf die Richtungen  $u, v$ ,



lassen sich ausdrücken durch die entsprechenden Größen bezogen auf die Richtungen  $i, j$ , und den Drehwinkel zwischen  $i$  und  $u$ . Die entsprechenden Umrechnungsformeln werden mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit, die richtungsunabhängig ist, abgeleitet für die Formänderungen, die den zehn Beanspruchungen entsprechen; auch sie reduzieren sich auf neun unabhängige Größen. *Moufang.*

**Zanaboni, Osvaldo:** Nuovi punti di vista sulle condizioni ai limiti delle lastre sottili. Ann. Triestini, Univ. Trieste, Sez. 2, 17, 53—72 (1947).

Das Ziel der Arbeit ist die Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen der Poissonschen und der Kirchhoffschen Theorie der Plattenbiegung; der Unterschied beider Theorien besteht in der Formulierung der Randbedingungen. Sei  $u, v$  ein rechtwinkliges Netz krummliniger Koordinaten in der Mittelfläche der Platte, so gewählt, daß der Plattenrand  $C$  mit der Kurve  $v = v_0$  zusammenfällt. Die Komponenten der Querkraft  $T$ , des Torsionsmomentes  $L$  und des Biegemomentes  $M$  genügen einem System von drei partiellen Differentialgleichungen, die das Gleichgewicht eines Plattenelementes gegen Verschiebung in vertikaler Richtung und gegen Drehung um die  $u$ - und  $v$ -Achse ausdrücken. Die Randbedingungen längs  $C$  schreiben die Werte von  $T_u, M_u$  und  $L_u$  vor in Übereinstimmung mit der Theorie von Poisson. Ohne Zuhilfenahme des Hookeschen Gesetzes oder der Hypothese, daß die Plattenormalen geradlinig bleiben, ergeben sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit im Innern der Platte für die Verzerrungen, die in Richtung der  $u, v$ -Achse den Kräften  $T_u, T_v, M_u, M_v, L_u = L_v$  entsprechen, Darstellungen durch die Normalverschiebung  $w$  der Platte und die Komponenten  $\varphi_u, \varphi_v$  der Drehung eines Elementes, und am Rande vorgeschriebene Werte für  $w, \varphi_u, \varphi_v$ . Führt man die Rechnung so durch, daß von vornherein die Arbeit der Querkräfte Null gesetzt wird, so ergeben sich im Innern der Platte für die Beanspruchungen die vorigen Gleichgewichtsbedingungen, am Rande jedoch die Kirchhoffschen Bedingungen, die die Werte von  $M$  und  $T + dL/ds$  vorschreiben. Es wird darauf hingewiesen, daß es nicht möglich ist, die Kirchhoffsche Form der Randbedingungen aus dem Prinzip von De St. Venant zu rechtfertigen. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Zanaboni, Osvaldo:** Tensioni tangenziali e scorrimenti nelle travi di parete delle strutture scatolari. Pubbl. Fac. Sci. Ing., Univ. Trieste, Ser. A, Nr. 24, 8 S. (1949).

Elementare Festigkeitsberechnungen eines als Schachtelkonstruktion bezeichneten Systems rechtwinkliger Platten, die zu je zweien an den Längsseiten giebelartig miteinander befestigt sind unter der Annahme, daß eine Plattendimension die anderen Dimensionen überwiegt. Betrachtet man eine Platte des Systems als einen Balken, der an den Längsseiten belastet ist, so ergibt sich die Tangentialspannung in einer Platte als Funktion der Randkräfte eines Plattenelementes und als quadratische Funktion des Abstandes von der Plattenlängsseite. Nach dem Prinzip von Castigliano gewinnt man daraus die Schiebung. Weiter werden Ausdrücke für die Horizontalverschiebungen an den beiden Plattenrändern abgeleitet. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Zanaboni, Osvaldo:** Lastra rettangolare appoggiata su due lati opposti e soggetta a condizioni statiche varie sugli altri due. Pubbl. Fac. Sci. Ing., Univ. Trieste, Ser. A, Nr. 21, 15 S. (1949).

In Ergänzung von vier früheren Arbeiten (dies. Zbl. 23, 79; ferner: Soluzione caratteristica della lastra rettangolare a due lati appoggiati, sotto l'azione di forze e coppie concentrate, Atti 2. Congr. Un. mat. Ital. 1940, und Ricerche Ingegn. 1941, n. 4; Soluzione della lastra rettangolare sotto carichi comunque distribuiti lungo linee e superficie, Atti 2. Congr. Un. mat. Ital. 1940 und Ricerche Ingegn. 1941, n. 5; Ann. Mat. pura appl. 1941) behandelt Verf. eine Rechteckplatte, die an zwei Gegenseiten ( $x = 0, x = h$ ) frei aufgestützt ist. Für die Befestigung des anderen Gegenseitenpaares ( $y = a_1, y = a_2$ ) werden alle möglichen Kombinationen erörtert in der Weise, daß von den vier Kenngrößen der Kirchhoffschen Plattentheorie irgend zwei für jede Seite des Paares vorgeschrieben sind als Sinusreihen in  $x$ . Die Durchbiegung der Platte unter einer gegebenen Belastung stellt sich dar als Summe von zwei Sinusreihen in  $x$ , in der Form  $w = w_0 + w$ , wobei die Koeffizienten  $F_n(y)$  von  $w_0$  durch die Belastung bestimmt sind und

die Koeffizienten in  $\bar{w}$  Linearkombinationen der Funktionen  $\sinh a_n y$ ,  $y \cosh a_n y$  und  $y \sinh a_n y$  ( $a_n = n\pi/h$ ) sind mit numerischen Koeffizienten  $A_n, B_n, C_n, D_n$ . Die Berechnung der vier Kirchhoffschen Kenngrößen an den Rändern  $y = a_1, y = a_2$  liefert für die  $A_n, B_n, C_n, D_n$  je vier lineare Gleichungen. Verf. kombiniert irgend zwei Gleichungen des Systems für  $y = a_1$  mit irgend zwei Gleichungen des Systems für  $y = a_2$  und bestimmt daraus die  $A_n, B_n, C_n, D_n$  durch Elimination. Die Gleichungen enthalten noch die Werte  $F_n(a_1)$  resp.  $F_n(a_2)$ . Für spezielle Belastungsfälle (Einzelkraft, gleichförmige Belastung) ist die Grundlösung  $w_0$ , also auch  $F_n(y)$ , bekannt und die  $A_n, B_n, C_n, D_n$  lassen sich dann numerisch berechnen. *Moufang.*

**Zanaboni, Osvaldo: Reticoli di travi a grande numero di maglie.** Pubbl. Fac. Sci. Ing., Univ. Trieste, Ser. A, Nr. 11, 16 S. (1947).

Als mathematisches Modell für ein rechtwinkliges Gitter aus zwei Reihen paralleler Träger nimmt Verf. 2 gleiche übereinanderliegende Platten, jede wird in eine Schar paralleler Streifen zerschnitten, beide Scharen liegen zueinander gekreuzt. Ein Streifen der oberen Platte ist mit einem Streifen der unteren Platte so befestigt, daß nur Vertikalkräfte längs der Streifenachse übertragen werden können; 2 benachbarte parallele Streifen beeinflussen sich nicht. Alsdann liefert eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung für die gemeinsame Durchbiegung  $w$  des Streifensystems unter der Belastung  $p(x, y)$  pro Flächeneinheit die Differentialgleichung

$$N_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p,$$

wo  $N_i$  Steifigkeitskonstanten sind. Die Durchbiegung  $w(x, y)$ , aufgefaßt als Durchbiegung eines Plattenstreifens in der  $x$ -Richtung, genügt der Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens mit geeigneten Randbedingungen, so daß sich  $w$  entwickeln läßt nach den orthogonalen normierten Eigenfunktionen  $w_n(x)$  des Problems  $w^{(4)}(x) + \lambda^4 \cdot w(x) = 0$ :

$$w(x, y) = \sum Y_n(y) w_n(x).$$

Trägt man dies zusammen mit dem Ansatz  $p(x, y) = \sum p_n(y) w_n(x)$  in die partielle Differentialgleichung ein, so ergibt sich für  $Y_n(y)$  eine inhomogene Differentialgleichung vom Typus wie für  $w_n(x)$ , die sich explizit mit vier Konstanten integrieren läßt. Über diese Konstanten ist so zu verfügen, wie die Befestigungsbedingungen der gedachten Platte längs der Kanten  $y = \text{const.}$  es vorschreibt. Damit ist für einen Streifen in der  $y$ -Richtung die Durchbiegung als unendliche Reihe bekannt, woraus sich durch gliedweise Differentiation das Torsionsmoment, das Biegemoment und die Querkraft ergibt. Analoge Formeln lassen sich für die Streifen in der  $x$ -Richtung entwickeln. In der Praxis genügt es,  $p_n(y)$  als kubisches Polynom in  $y$  anzusetzen, wodurch die Formeln sich vereinfachen. — Das Verfahren wird an zwei numerischen Beispielen erläutert. Die erhaltenen Reihen konvergieren rasch. Im Falle eines gleichförmig belasteten Trägerrosters von je drei Reihen paralleler Träger, die an den Enden abgestützt sind, zeigt bereits die Näherung 1. und 2. Grades eine gute Übereinstimmung mit dem wahren Wert. *Moufang.*

**Winzer, Alice and G. F. Carrier: Discontinuities of stress in plane plastic flow.** J. appl. Mech., New York 16, 346—348 (1949).

W. Prager (dies. Zbl. 33, 228) und die Verf. (dies. Zbl. 33, 229) haben die mit ebenen plastischen Spannungszuständen verträglichen Unstetigkeiten untersucht. Die plastische Torsion von Stäben mit rechteckigem bzw. ovalem Querschnitt bietet ein Beispiel für das Auftreten von Unstetigkeitsflächen, längs deren der Spannungssprung konstant bzw. veränderlich ist. W. Prager hat i. e. den längs einer Flanke normal belasteten Keil mit einem Öffnungswinkel kleiner als  $\pi/2$  untersucht; dabei tritt eine Unstetigkeitsfläche mit konstantem Spannungssprung auf, die zwei Bereiche konstanter Spannung trennt. Hier wird das „inverse Keilproblem“ behandelt und auf Unstetigkeitsflächen mit veränderlicher Intensität verallgemeinert: gegeben ist eine Unstetigkeitsfläche, deren Spur in der  $x, y$ -Ebene eine Gerade ist, mit gegebener veränderlicher Intensität; die Begrenzung der zugehörigen Bereiche I und II und deren Normalbelastung ist zu finden. Die Bedingungen des ebenen plastischen Gleichgewichtes werden wie üblich durch den Ansatz  $\sigma_x = k(2w + \sin 2\theta)$ ,  $\sigma_y = k(2w - \sin 2\theta)$ ,  $\tau_{xy} = -k \cos 2\theta$  ( $k$  = Fließspannung bei reinem Schub) auf die Variablen  $\xi(x, y) = w(x, y) + \theta(x, y)$ ,  $\eta(x, y) = w - \theta$  transformiert und alsdann für  $\xi, \eta$  formale Potenzreihen in  $x$  und  $y$  angesetzt (in der Praxis nehme man Polynome), deren Koeffizienten für die Gebiete I und II sich rekursiv aus den Randbedingungen, d. h. den Werten von  $w$  und  $\theta$  in II längs der Unstetigkeitsfläche und den Sprungbedingungen bestimmen lassen. Um weiter die Ränder der Bereiche I und II zu ermitteln, hat man die Differentialgleichungen  $dy/dx = \tan(\theta - \pi/4)$  für II,  $dy/dx = \tan(\theta + \pi/4)$  für I mit den Anfangsbedingungen  $x_0 = y_0 = 0$  zu integrieren. Die auf diese Begrenzungen wirkenden Normalbelastungen bestimmen sich aus  $N_1 = (2w_I - 1)k$ ,  $N_2 = (2w_{II} + 1)k$ . Ein numerisches Beispiel erläutert die Methode. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Drucker, D. C.: Relation of experiments to mathematical theories of plasticity.** J. appl. Mech., New York 16, 349—357 (1949).

An Hand neuerer Untersuchungen gibt Verf. eine kritische Übersicht über die bisherigen Ansätze der Plastizitätstheorie isotroper Stoffe im Bereich infinitesimaler



Formänderungen, insbesondere der Plastizitätsgesetze vom Deformationstypus und dem Fließtypus [siehe dazu z. B. W. Prager: J. appl. Phys. **16**, 837—840 (1945); A. Gleyzal: J. appl. Mech., Trans. ASME **68**, A 261 (1946)]. Die möglichen Formen des Verfestigungsgesetzes bei mehrachsiger Beanspruchung und die Bedingung für den Eintritt des Fließens, insbesondere die Hypothesen von Mohr und Mises, werden erörtert und Versuche an dünnwandigen Rohren unter kombinierter Beanspruchung beschrieben, die den Unterschied zwischen beiden Hypothesen deutlich machen können. Die von W. R. Osgood [J. appl. Mech., Trans. ASME **69**, A 147 (1947)] erhaltenen Meßwerte bei Versuchen mit kombinierter Zug-Innendruck-Torsions-Belastung weisen eine bessere Gesetzmäßigkeit auf, wenn man  $\sqrt{J_2}$  gegen  $\sqrt{I_2}(1 - 2,25(I_3/I_2))^{1/2}$  aufträgt ( $I_2, I_3 = 2.$  und  $3.$  Invariante des Spannungsdeviators,  $J_2 = 2.$  Invariante des Verzerrungsdeviators) als bei Betrachtung von  $J_2 = f(I_2)$  oder  $\tau_{\max} = f(\gamma_{\max})$ . — Auf Grund des Bauschinger-Effektes erscheint von vornherein eine Funktion der drei Hauptwerte des Spannungstensors als Verfestigungsfunktion ungeeignet und darüber hinaus auch der Ansatz, daß  $f$  von den drei Invarianten beider Tensoren abhängt. Daher ist eine mathematische Theorie der Plastizität anzustreben, die von vornherein die Anisotropie berücksichtigt. Sie wird jedoch so wenig einfach sein, daß es nützlich ist, zunächst durch Versuche die Gültigkeitsgrenzen der Verformungsgesetze vom Fließtypus mit isotroper Spannungsverfestigung festzustellen und die Funktion  $f(I_2, I_3)$  genauer zu ermitteln.

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Prager, William:** Discontinuous solutions in the theory of plasticity. Proc. Symposia appl. Math., Nr. **1**, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non-linear problems in mechanics of continua), 211—212 (1949).

Zusammenfassung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **33**, 228).

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Graffi, Dario:** Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. **4**, 103—109 (1948).

L'A. stabilisce una notevole relazione di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. Si consideri un corpo elastico omogeneo di volume  $v$  e limitato dalla superficie  $\sigma$ ; siano  $\rho$  la densità;  $\rho \mathbf{F}$  le forze di masse;  $\mathbf{R}$  le forze superficiali;  $\mathbf{S}$  lo spostamento del generico punto  $P$  del corpo;  $\mathbf{V} = \partial \mathbf{S} / \partial t$ ;  $\mathbf{S}_0, \mathbf{V}_0$  i valori iniziali rispettivamente di  $\mathbf{S}, \mathbf{V}$ . Se in uno stato del corpo le predette grandezze hanno i valori  $\rho \mathbf{F}_1, \mathbf{R}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{S}_{01}, \mathbf{V}_{01}$  ed in un secondo stato hanno i valori  $\rho \mathbf{F}_2, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{V}_2, \mathbf{S}_{02}, \mathbf{V}_{02}$ , la predetta relazione di reciprocità si scrive:

$$\int_0^t d\tau \int_v \rho \mathbf{F}_1(t-\tau) \times \mathbf{S}_2(\tau) dv + \int_0^t d\tau \int_\sigma \mathbf{R}_1(t-\tau) \times \mathbf{S}_2(\tau) d\sigma + \int_v (\mathbf{S}_2 \times \mathbf{V}_{01} + \mathbf{V}_2 \times \mathbf{S}_{01}) dv \\ = \int_0^t d\tau \int_v \rho \mathbf{F}_2(t-\tau) \times \mathbf{S}_1(\tau) dv + \int_0^t d\tau \int_\sigma \mathbf{R}_2(t-\tau) \times \mathbf{S}_1(\tau) d\sigma + \int_v (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{V}_{02} + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{S}_{02}) dv.$$

— Essa é dedotta dalle tre equazioni vettoriali della dinamica dei corpi elastici per mezzo della trasformazione di Laplace (rispetto al tempo  $t$ ). Sono esaminati vari casi particolari; fra questi rientrano tre diverse estensioni del teorema di reciprocità di Betti al caso dinamico, di cui due già date dall'A. in un precedente lavoro [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **18**, 173—200 (1939); questo Zbl. **22**, 147].

*Aldo Ghizzetti* (Roma).

**Federhofer, Karl:** Eigenschwingungen von geraden Stäben mit dünnwandigen und offenen Querschnitten. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa **156**, 393—416 (1948).

Die Transversalschwingungen gerader Stäbe sind nur dann reine Biegeschwingungen, wenn die Wirkungslinie der Querkraft mit jener der resultierenden Trägheitskraft zusammenfällt. Da die eine durch den Schubmittelpunkt, die andere



durch den Querschnittsschwerpunkt hindurchgeht, können sich im allgemeinen nur dann reine Biegungsschwingungen ausbilden, wenn beide Punkte zusammenfallen, d. h. nur bei symmetrischen Querschnittsformen. Andernfalls tritt gleichzeitig Torsion auf, und der allgemeine Schwingungsvorgang muß nach der Theorie der gekoppelten Schwingungen behandelt werden, wobei Kopplung zwischen den beiden (zueinander senkrechten) Transversalschwingungen und der Torsionsschwingung eintritt. Verf. behandelt das Problem mit Bezug auf dünnwandige, offene Profilformen, bei welchen der Kopplungseffekt besonders stark wird, und benützt die Theorie von R. Kappus [Luftfahrtforsch. **14**, 448 (1937)] als Ausgangspunkt. Die drei Gleichgewichtsbedingungen werden durch Variation der Differenz der potentiellen und kinetischen Energie (Lagrangesche Funktion) gewonnen und nach Einführung dimensionsloser Größen diskutiert. Im Falle der an den Enden nicht behinderten Querschnittsverwölbung ist eine verhältnismäßig einfache Diskussion der aus den Randbedingungen folgenden Frequenzgleichung möglich, die für ein  $U$ -Profil weitgehend durchgeführt wird. Hierbei ist die Abnahme des Kopplungseffektes mit der Länge und der Wandstärke deutlich erkennbar. *H. Neuber* (Dresden).

**Federhofer, Karl: Berechnung der Drehschwingungen eines Kreiszylinders mit Berücksichtigung des Einflusses der Baustoffdämpfung und einer äußeren Flüssigkeitsreibung.** Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa **156**, 573—582 (1948).

Die auf L. Pochhammer [J. reine angew. Math. **81**, 324 (1876)] zurückgehende Theorie der Längs-, Quer- und Drillungsschwingungen wird vom Verf. durch Berücksichtigung der Baustoffdämpfung und der Flüssigkeitsreibung erweitert. Unter der Bedingung der Spannungsfreiheit der Anfangs- und Endquerschnitte werden die Frequenzen der Drehschwingungen des Kreiszylinders und die zugehörige Verformung diskutiert. *H. Neuber* (Dresden).

**Federhofer, Karl: Über die Biegungs-Drillungsschwingungen des Kreisringes mit doppelt-symmetrischem Querschnitte.** Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa **157**, 299—320 (1949).

Der dünne Kreisring kann wie ein gekrümmter Stab sowohl Dehnungs- (Längs- oder Umfangs-)Schwingungen, Biegungs-(Quer-)Schwingungen und Drillungsschwingungen ausführen, welche im allgemeinen miteinander gekoppelt sind, sofern nicht eine der beiden Querschnittshauptachsen in die Ringebene fällt. Fällt eine Hauptachse in die Ringebene, so treten die Dehnungs-Biegungsschwingungen in der Ringebene und die Drillungs-Biegungsschwingungen senkrecht zur Ringebene unabhängig voneinander auf. Die genaue Untersuchung des zweiten Schwingungstyps ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit, wobei außer dem Zusammenfallen einer Hauptachse mit der Ringebene noch Doppelsymmetrie des Querschnittes vorausgesetzt wird. Damit gibt Verf. eine Verbesserung der alten Theorie von J. H. Michell [Mess. Math., II, S. **19**, 68 (1890)]. Die Ableitung erfolgt durch Variation der Differenz der kinetischen und elastischen Energie unter weitgehender Anwendung dimensionsloser Hilfsgrößen. Die Ergebnisse werden für Stahlringe mit quadratischem Querschnitt ausgewertet, wobei Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen von W. Kuhl [Akust. Zeitschr. **7**, 125 (1942)] vorgenommen werden, welche so ihre erste exakte Interpretation erfahren. Neben der qualitativen Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie weist Verf. nach, daß bis zu einem bestimmten Dickenverhältnis die Theorie auch quantitativ sichergestellt ist. Auch die von A. B. Basset [Proc. London math. Soc. **23**, 105 (1892)] aufgestellte Lösung für den Kreisquerschnitt, mit der Kuhl selbst seine Meßergebnisse zu vergleichen suchte, erfährt durch vorliegende Arbeit eine Verschärfung. *H. Neuber* (Dresden).

**Pailloux, Henri: Sur la chute d'une barre.** C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1118—1120 (1949).

Im Abstand  $x$  vom oberen Ende erfährt der Querschnitt eines vertikalen elastischen Stabes, dessen unteres Ende auf einer Stütze ruht, eine Zusammendrückung  $u(x, 0) = \rho g x^2/2E$  ( $\rho$  Masse der Volumeinheit,  $E$  Elastizitätsmodul). Bei plötzlicher Wegnahme der Stütze ergeben sich während des freien Falls des Stabes infolge Entspannung des unteren Endes longitudinale Schwingungen des Stabes. Zu deren Kennzeichnung wird eine  $x$ - und  $t$ -periodische Funktion  $U(x, t)$  bestimmt, so daß  $U_t = -u(x, t)$ ; sie genügt der Wellengleichung. Verf. untersucht insbesondere die infolge der Unstetigkeit in Rand- und Anfangsbedingungen auftretenden Singularitäten der Integralflächen  $U(x, t)$ . Reutter (Karlsruhe).

Charrueau, André: Petits mouvements vibratoires d'un corps élastique avec propagation de discontinuités du premier ordre. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 361—362 (1950).

Im Anschluß an den Aufsatz von Pailloux (s. vorsteh. Referat) bemerkt Verf., daß man auch von der d'Alembertschen Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ausgehen kann. Das Problem wird jetzt eingeordnet in die allgemeinere Aufgabe der Untersuchung der kleinen Schwingungen eines elastischen Körpers mit Fortpflanzung der Unstetigkeiten erster Ordnung. Es gibt  $\infty^1$  Unstetigkeitsflächen  $S_t$ ; Parameter dieser Schar ist die Zeit  $t$  (Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsflächen  $\omega$ ). Zugeordnete Punkte verschiedener Unstetigkeitsflächen, deren Tangentialebenen parallel sind, liegen auf einer Geraden. Die  $\infty^2$  Geraden bilden eine Strahlenkongruenz, ihre abwickelbaren Regelflächen schneiden auf jeder Fläche  $S_t$  ein konjugiertes Netz aus. Irgendeine dieser Regelflächen schneidet zwei Flächen  $S_t$  in zwei Kurven mit demselben sphärischen Bild. Daraus ergibt sich eine geometrische Kennzeichnung der Extremwerte von  $\omega$  auf der Fläche  $S_0$ . Reutter.

Thomson, W. T.: Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness. J. appl. Mech., New York **16**, 203—207 (1949).

Verf. ersetzt nach dem Vorgange von M. Hetenyi [J. appl. Mech. **59**, A—49 (1937)] den durch eine Schwächung von der Breite  $c$  gekennzeichneten schlanken Stab durch einen solchen von konstantem Querschnitte, der aber dafür an der Stelle der Schwächung durch ein entsprechend sprunghaft vergrößertes Biegemoment (für die Berechnung der Biegungsschwingungen), eine entsprechend vergrößerte Längskraft (für die Longitudinalschwingungen) bzw. durch ein entsprechend vergrößertes Drehmoment (für die der Torsionsschwingungen) belastet ist. — Unter geschickter Benutzung der Laplace-Transformation und bei Beachtung der jeweils geltenden Randbedingungen erhält nun Verf. für die drei gekennzeichneten Schwingungsarten die zugehörigen Frequenzgleichungen, die er für den Fall einer Kerbe in der Stabmitte in beigefügten Schaubildern graphisch auswertet und so den Einfluß der Kerbe erweist. Hinsichtlich des Einflusses des an der Kerbe anliegenden Stabmaterials wird auf die Notwendigkeit entsprechender Versuche verwiesen.

Karas (Darmstadt).

Graffi, Dario: Sulla teoria delle oscillazioni libere in un sistema soggetto a forze elastiche con ereditarietà. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 227—247 (1949).

E. Volterra (dies. Zbl. **29**, 279) bestimmte die Integro-Differentialgleichung für die Durchbiegung eines gestützten elastischen Balkens im Bereich der Nachwirkung unter gegebener zeitlich veränderlicher Belastung; für den Spezialfall der freien Schwingung erhielt er für die Durchbiegung eine unendliche Reihe, fortschreitend nach Funktionen  $q_v(t)$  mit von  $x$  abhängigen Faktoren, wobei die  $q_v$  einer Integro-Differentialgleichung 2. Ordnung genügen, die Verf. hier in der etwas verallgemeinerten Form

$$q''(t) + 2p q' + w^2 q - \int_{t_0}^t \sum_{r=1}^n \alpha_r A_r e^{-\alpha_r(t-\tau)} d\tau = 0$$

untersucht mit gegebenen Anfangsbedingungen. Der Nachwirkungskern ist dabei

in der Form  $\sum_{r=1}^n A_r e^{-\alpha_r(t-\tau)}$  angenommen. Sind die Konstanten  $p, \alpha_r$  mit  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , und  $A_r$  alle  $> 0$ , so führt der Ansatz  $q(t) = \sum_{s=1}^{n+2} c_s e^{x_s t}$  mit unbekannten Konstanten  $x_s, c_s$  zur Bestimmung der  $x_s$  auf eine algebraische Gleichung vom Grade  $n+2$ , zur Bestimmung der  $c_s$  auf ein System von  $n+2$  linearen inhomogenen Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante. Die algebraische Gleichung für die  $x_s$  hat außer reellen negativen Lösungen höchstens zwei konjugiert komplexe Wurzeln mit negativem Realteil. Dann ist  $q(t)$  eine Summe von  $n$  Exponentialfunktionen mit negativen Exponenten für  $t > 0$  und einer gedämpften Schwingung. Daraus ergibt sich eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Durchbiegung eines für  $t < 0$  unbelasteten und für  $t \geq 0$  einer sinusförmigen Belastung unterworfenen Balkens. Sind  $p \ll w^2$  und  $\alpha_r \ll w^2$  und noch  $\sum_{r=1}^n \frac{A_r \alpha_r}{\beta} \ll \frac{1}{2}$ , wo  $\beta$  die kleinste unter den Zahlen  $\alpha_1$  und  $|\alpha_r - \alpha_s|, r \neq s$  ist, so kann man die  $x_s, c_s$  näherungsweise explizit bestimmen. Es ergibt sich, daß Nachwirkungserscheinungen in erster Näherung nur den Dämpfungsfaktor der Schwingung beeinflussen, in dem gegenüber dem Fall fehlender Nachwirkung das Glied  $\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \frac{A_r \alpha_r}{w^2}$  hinzutritt; die Frequenz der gedämpften Schwingung ist  $w$ .

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Covezzoli, Paolina:** Sulle oscillazioni forzate di una trave elastica in regime ereditario. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 261—264 (1949).

Unter der Annahme des asymptotischen Abklingens der Nachwirkung erhält Verf. aus der von E. Volterra (dies. Zbl. 29, 279) abgeleiteten Integro-Differentialgleichung für die Durchbiegung des Balkens unter periodischer äußerer Belastung durch Heranziehung der in der Elektrotechnik gebräuchlichen komplexen Schreibweise einfacher Schwingungen Formeln für die maximale Auslenkung und die Phasenverschiebung der Auslenkung gegenüber der erregenden Kraft. Hierbei kann der Nachwirkungskern beliebig vorgeschrieben sein. Für den Spezialfall, daß der Kern eine einfache Exponentialfunktion ist, gehen die hier abgeleiteten Formeln in die Formeln von E. Volterra über.

*Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Giangreco, Elio:** Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 34—38, 113—115 (1950).

Aus der Integrodifferentialgleichung für die statische Durchbiegung einer Rechteckplatte, die durch zwei zueinander senkrechte Rippen durch den Plattenmittelpunkt versteift ist (siehe Tolotti und Grioli: Sul calcolo delle piastre con nervature, Giorn. Genio Civile, Juni 1949), gewinnt Verf. die Integrodifferentialgleichung für die Durchbiegung der frei schwingenden Platte durch Berücksichtigung der Trägheitskräfte gemäß dem d'Alembertschen Prinzip. Die Separation der Durchbiegung in eine periodische Funktion der Zeit und eine ortsabhängige Funktion  $w(x, y)$  liefert für  $w(x, y)$  eine homogene Integrodifferentialgleichung mit einem Parameter. Entwickelt man den Kern in eine unendliche Reihe nach den Eigenfunktionen der schwingenden Rechteckplatte, so reduziert sich bei Approximation der unendlichen Reihe durch einen endlichen Abschnitt die Lösung der Integrodifferentialgleichung auf die Lösung eines Systems linearer homogener Gleichungen zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten von  $w$ . Die Nullstellen der Determinante des Gleichungssystems liefern die Quadrate der Frequenz, die zu den Eigenwerten proportional sind. Am Beispiel einer quadratischen Platte ist gezeigt, daß die Reihen rasch konvergieren: Die Frequenz der Grundschwingung, berechnet mit Hilfe der ersten Näherung allein, weicht von dem entsprechenden Wert, der mit der ersten und zweiten Näherung berechnet ist, um weniger als 0,2% ab.

*Moufang* (Frankfurt a. M.).



**Krall, Giulio:** Stabilità dell'equilibrio elastico. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 75—90 (1949).

Die Grundlage aller Stabilitätsbetrachtungen ist das Prinzip von Dirichlet, demzufolge das Gleichgewicht stabil oder instabil ist, je nachdem die gesamte potentielle Energie  $E$  als Summe der elastischen Energie und der potentiellen Energie der äußeren Kräfte ein Minimum oder ein Maximum ist. Zerlegt man die Zunahme von  $E$  beim Übergang von einem Gleichgewichtszustand des Systems zu einem benachbarten Zustand vermöge der Verschiebungen  $u, v, w$  in eine Summe von Gliedern, die resp. in  $u, v, w$  vom 1., 2., . . . Grad sind,  $\Delta E = \delta_1 E + \delta_2 E + \dots$ , so ist das Gleichgewicht stabil, indifferent oder instabil, je nachdem  $\delta_2 E \gtrless 0$ , falls  $\delta_1 E = 0$  ist. Die Auswertung der Bedingung  $\delta_2 E = 0$  führt nur bei Problemen mit einem Freiheitsgrad unmittelbar auf eine Gleichung für den in die elastische Energie eingehenden Parameter  $\lambda$ , der den kritischen Wert für die äußere Belastung liefert. Bei Problemen mit mehreren Freiheitsgraden hat man  $\lambda$  aus dem Variationsproblem  $\delta W + \lambda \delta (L_2^* - L_2) = 0$  zu bestimmen ( $W$  = elastische Energie beim Übergang vom spannungsfreien Zustand  $u = v = w = 0$  zum Zustand  $u, v, w$ ;  $L_2^*$  resp.  $L_2$  = Summe der Glieder 2. Ordnung in  $u, v, w$  in der Arbeit der inneren resp. der äußeren Kräfte). In solchen Fällen ergibt sich der kritische Wert für  $\lambda$  als die kleinste Wurzel einer Determinante. Für kontinuierliche Systeme läßt sich prinzipiell das zugehörige Variationsproblem durch die direkten Methoden der Variationsrechnung, d. h. durch Entwicklung der  $u, v, w$  nach einem gegebenen Funktionensystem, auf den vorigen Fall zurückführen. Die explizite Berechnung von  $L_2^*$  und  $L_2$  bietet indessen schon in einfachen Fällen erhebliche Schwierigkeiten. Die Berechnung ist vollständig durchgeführt am Beispiel einer unendlich langen kreiszylindrischen Schale unter Außendruck, der axial belasteten Säule und des freitragenden Gewölbes mit kreisförmigem bzw. zyklidenförmigem Profil. Abschließend wird noch auf das Problem des seitlichen Ausknickens von Konsolträgern und im Zusammenhang damit auf Instabilitätsfragen der Tragflügeltheorie eingegangen. *Moufang.*

**Pekeris, C. L.:** Ray theory vs. normal mode theory in wave propagation problems. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 2 (Massachusetts Institute of Technology, July 29—31, 1948. Electromagnetic theory), 71—75 (1950).

Das Feld einer punktförmigen Schallquelle, die zwischen zwei parallelen, unbegrenzt großen und schallweichen Wänden steht, läßt sich bekanntlich in zweierlei Weise darstellen. Man kann einmal der Lösung die Form einer Eigenwertlösung geben. Jeder einzelne Term dieser unendlich vielgliedrigen Lösung erfüllt darin für sich die Wellengleichung und die Randbedingungen. Bei dem anderen Lösungsweg setzt sich das Feld zusammen aus den ungestörten Strahlungsfeldern der gegebenen Schallquelle und ihrer unendlich vielen Spiegelbilder an den beiden Begrenzungsflächen. Der Verf. zeigt, daß in dem vorliegenden einfachen Falle beide Lösungen durch die Poissonsche Summenformel auseinander hervorgehen. *H. Buchholz.*

**Heins, A. E. and H. Feshbach:** The coupling of two acoustical ducts. J. Math. Phys., Massachusetts 26, 143—155 (1947).

Die Hopf-Wienersche Methode der Lösung einer Integralgleichung mit dem Kern  $K(x-y)$  und den Grenzen  $-\infty \dots +\infty$ , die bekanntlich von Schwinger auf die Lösung der gleichartigen Integralgleichung mit den Grenzen  $0 \dots \infty$  erweitert worden ist, wird hier von den Verff. auf den folgenden Fall angewendet: Für die Ausbreitung einer Schallwelle liegt ein unendlich langer, hohler Kanal von rechteckigem Querschnitt vor. Seine Richtung falle mit der Richtung der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammen. Die beiden zueinander parallelen Begrenzungsflächen  $z = \pm a$  des Kanals seien vollkommen starr, so daß an ihnen das Geschwindigkeitspotential  $\psi$  der Schallwelle der Randbedingung  $\partial\psi/\partial n = 0$  genügen muß. An den Begrenzungsflächen  $y = \pm b$  soll aber

$\partial\psi/\partial n = f\psi$  für  $x < 0$  und  $\partial\psi/\partial n = f'\psi$  für  $x > 0$  sein. Die Lösung dieser Randwertaufgabe wird auf eine homogene Hopf-Wienersche Integralgleichung zurückgeführt und durch Anwendung der komplexen Fourier-Transformation gelöst. Die Herstellung der Lösung wird eingehend besprochen und zum Schluß vor allem der für den Reflexionskoeffizienten in der Ebene  $x = 0$  gewonnene Ausdruck diskutiert.

H. Buchholz (Seeheim, Bergstr.).

Schmidt, W.: Untersuchungen des für den schiefen Stoß elastischer Kugeln gültigen Reflektionsaxioms und einige Folgerungen daraus. Z. angew. Math. Mech. 30, 182—184 (1950).

Die oft gemachte Annahme der Gleichheit von Einfallswinkel und Ausfallswinkel beim elastischen Stoß einer Kugel gegen eine Wand wird mit Recht beanstandet. Die neu dargebotene Lösung hält aber Ref. für mißverständlich, was er an anderer Stelle nachzuweisen gedenkt. Außerdem steht die richtige Lösung vollständig in seiner Elementaren Mechanik (Berlin/Leipzig 1912) in Nr. 298, § 52, S. 448.

Hamel (Landshut).

## Wärmelehre:

\*Elliott, G. A.: Thermodynamic equilibrium. Nature, London 165, 934—935 (1950).

Chemisch-thermodynamische Gleichgewichte pflegen je nach den näheren Umständen durch besondere Bedingungen gekennzeichnet zu sein, z. B. dadurch, daß die freie Energie  $F$  oder die freie Enthalpie  $G$  einen Extremalwert annehmen sollen. Eine alle Fälle umfassende Bedingung scheint jedoch bisher noch nicht bekannt zu sein. Verf. schreibt dieses großenteils dem Umstand zu, daß man hierbei von der Unterscheidung zwischen inneren ( $i$ ) und äußeren ( $a$ ) Kräften des Systems abzu- sehen pflegte. Die allgemeine Formel für die Änderung der Energie kann

$$(1) \quad dE = T dS + \sum \mu dn - (\sum X_i dx_i + \sum X_a dx_a)$$

geschrieben werden; darin sind  $E$  die Gesamtenergie,  $T$  und  $S$  Temperatur und Entropie,  $X$  und  $x$  Kräfte und zugehörige Koordinaten (im verallgemeinerten Sinne), unterschieden nach inneren und äußeren Kräften,  $n$  und  $\mu$  Molzahlen und zugehörige Potentiale der Komponenten des Systems. Da für ein abgeschlossenes System  $dE = T dS - \sum X_a dx_a$  gilt, so findet sich durch Subtraktion von (1) als allgemeine Bedingung für ein reversibles chemisch-thermodynamisches Gleichgewicht:  $\sum \mu \cdot dn = \sum X_i dx_i$ . Verzichtet man auf Reversibilität, so darf hier auch  $>$  statt  $=$  stehen.

Bödewadt (Brunoy).

Lohr, Erwin: Thermoelektrizität, thermomagnetische und galvanomagnetische Transversaleffekte, behandelt vom Standpunkte der Differentialform des Entropiesatzes. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 355—381 (1948).

Eine phänomenologische Theorie der thermoelektrischen Effekte wird durch eine Verallgemeinerung der Maxwell'schen Gleichungen entwickelt und die thermomagnetischen und galvanomagnetischen Transversaleffekte werden auf Grund dieser Theorie behandelt — Leider wird die Notwendigkeit dieser neuen Theorie nicht durch eine ausreichende Diskussion und Kritik der bisherigen, als befriedigend angesehenen, phänomenologischen Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen begründet. (Der. Ref.)

J. Meixner (Aachen).

Müller, Henning: Über die Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 7, 73—80 (1950).

Die ersten beiden Hauptsätze der Thermodynamik geben nur qualitative Aussagen über den Ablauf irreversibler Prozesse. Es wird am Beispiel der Wärmeleitung versucht, den quantitativen Ablauf dieses irreversiblen Prozesses durch ein Variationsprinzip zu beschreiben.

J. Meixner (Aachen).

**Boer, J. de:** Development of probability densities in power series of the density. *Physica, The Hague* **15**, 680—688 (1949).

Die Dichte  $n_h(r_1, r_2, \dots, r_h)$  für die Wahrscheinlichkeit,  $h$  Moleküle in beliebiger Reihenfolge an den Orten  $r_1, r_2, \dots, r_h$  zu finden, und die Dichte der kinetischen Energie werden nach Potenzen der Teilchendichte  $n_1(r_1) = n$  entwickelt. Sie werden für die Herleitung der allgemeinen kalorischen und thermischen Zustandsgleichung in der Arbeit des Verf. in *Physica, The Hague* **15**, 843—848 (1949) benötigt. Die zur Dichte  $n$  proportionalen Terme werden explicit angegeben; sie sind identisch mit den nach der Methode der Verteilungsfunktion erhaltenen. Ausgangspunkt ist der statistische Operator der kanonischen Gesamtheit  $P = z^{-1} \exp(-H_N/kT)$ , in welchem  $z$  ein Normierungsfaktor,  $H_N$  der Hamiltonsche Operator des Systems von  $N$  Molekülen ist.

*J. Meixner (Aachen).*

**Hove, L. van:** Quelques propriétés générales de l'intégrale de configuration d'un système de particules avec interaction. *Physica, The Hague* **15**, 951—961 (1949).

Verf. betrachtet für eine Gesamtheit von Teilchen, die in einem gewissen Raumteil eingeschlossen sind, die Helmholtzsche freie Energie pro Teilchen und den Druck, definiert durch das Gibbssche Zustandsintegral. Er gibt einen strengen Beweis für folgende thermodynamische Aussagen: Wenn die Teilchenzahl gegen  $\infty$  strebt, geht die freie Energie pro Teilchen nach einem endlichen Grenzwert, welcher von der Temperatur, den zwischenmolekularen Kräften, dem spezifischen Volumen, aber nicht von der Form des Volumens abhängt. Sie ist eine stetig abnehmende Funktion des spezifischen Volumens; ihre Ableitung ergibt den Druck, er ist eine nicht-wachsende Funktion des spezifischen Volumens. Damit ist gezeigt, daß eine vollständige Auswertung des Gibbsschen Integrals niemals zu nicht monotonen Isothermen mit metastabilen Zuständen führen kann. Die dabei gemachten Annahmen sind ein endlicher Molekülradius und rasch nach außen abfallende Wechselwirkungskräfte zwischen den Molekülen.

*W. Kofink (Stuttgart).*

**Green, H. S.:** The equation of state in quantized kinetic theory and quantum statistical mechanics. *Physica, The Hague* **15**, 882—890 (1949).

Die Zustandsgleichung einer Flüssigkeit wird streng nach den Methoden der quantenstatistischen Mechanik auf dem Weg über die Verteilungsfunktion und die freie Energie berechnet; so ergibt sich der „thermodynamische Druck“. Von diesem unterscheidet sich der „kinetische Druck“, welcher aus der Quantenhydrodynamik oder über den Virialsatz gewonnen wird. Die Differenz dieser Drucke wird berechnet; sie ist bei tiefen Temperaturen nicht mehr vernachlässigbar und bei flüssigem Helium bereits bei etwa  $2^\circ K$  dem kinetischen Druck gleich. Die beim flüssigen Helium II beobachteten merkwürdigen Eigenschaften dürften mit diesem Unterschied zwischen kinetischem und thermodynamischen Druck zusammenhängen [vgl. Green, *Proc. R. Soc. London A*, **194**, 244—258 (1948)]. In mathematischer Hinsicht hängt das Auftreten dieser Differenz eng damit zusammen, daß die Spur von  $A B - B A$  ( $A$  und  $B$  seien Operatoren) nicht Null zu sein braucht, bzw. daß die Summe einer unendlichen Doppelreihe von der Reihenfolge der Summationen abhängen kann.

*J. Meixner (Aachen).*

**Rideau, Guy:** Sur l'effet de condensation de la statistique de Bose-Einstein. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 1036—1038 (1950).

Verf. beschreibt qualitativ die Ergebnisse von Untersuchungen über das Verhalten eines idealen Bose-Gases im Zusammenhang mit dessen Kondensation. Das analytische Verhalten der physikalischen Größen wird unter Annahme eines kontinuierlichen Spektrums (Ersetzen der Zustandssumme durch ein Integral) untersucht, und es wird behauptet, daß das analytische Verhalten für die Ausbildung einer neuen Phase entscheidend ist.

*Leibfried (Göttingen).*

**Jost, W.:** Bemerkung zur mathematischen Behandlung komplizierter Diffusionsprobleme. *Z. Phys., Berlin* **127**, 163—167 (1950).



Die Boltzmannsche Differentialgleichung für eindimensionale Diffusion lautet  $\partial c / \partial t = \partial' \partial x [D(c) \partial c / \partial x]$ . Sucht man nach Boltzmann eine Lösung davon derart, daß  $c(x|t) = c(y)$ , so transformiert man obige Gleichung zunächst in  $-\frac{1}{2} y \, dc/dy = d/dy [D(c) \, dc/dy]$ . 2 statt  $\frac{1}{2}$  im Ansatz ist offenbar ein Rechenfehler, der sich leider bis zum Ende hinzieht. Mit vorgegebener Anfangsverteilung:  $c = c_0$  für  $x < 0$ ,  $t = 0$ , d. h.  $y = -\infty$ ;  $c = c_1$  für  $x > 0$ ,  $t = 0$ , d. h.  $y = +\infty$  kann man aus obiger Gleichung  $D(c)$  leicht bestimmen, falls auf Grund experimenteller Daten  $c$  als Funktion von  $y$  vorliegt. — Besteht aber in  $y = 0$ , d. h.  $x = 0$ ,  $t > 0$  eine Unstetigkeit, so kann nach Verf. diese erhalten bleiben, weil dann  $0 = d/dy [D(c) \, dc/dy] = \underline{D(\partial c / \partial x)}_- - \underline{D(\partial c / \partial x)}_+$  und daher auch:  $0 = f(c, c)$  ist. Ein solcher Fall kann z. B. bei Diffusion in einem zweiphasigen System, etwa „von Kohlenstoff aus Eisen in einen legierten Stahl“ vorkommen. — Einige andere Fälle werden vom Verf. auch diskutiert. Indessen scheint uns Gleichung (9) nicht haltbar, auch Gleichungen (11) und (12) bedenklich. S. C. Kar (Calcutta).

### Elektrodynamik:

Fraser, A. R. and D. Shoenberg: The magnetic behaviour of an anisotropic metal cylinder. Proc. Cambridge phil. Soc. **45**, 680—683 (1949).

Das Verhalten eines isotropen, metallischen, kreisförmigen Zylinders, dessen Achse in der Richtung eines äußeren magnetischen Wechselfeldes mit der Kreisfrequenz  $\omega$  liegt, ist seit langem bekannt. Die Verff. betrachten den bisher noch nicht untersuchten Fall, daß unter den gleichen äußeren Bedingungen das Metall hinsichtlich seiner elektrischen Leitfähigkeit anisotrop ist. Es lautet dann mit  $\varrho$  in der Bedeutung des Widerstandes je Volumeneinheit die das Magnetfeld bestimmende Vektorgleichung  $\text{rot}(\varrho \, \text{rot} \, \mathfrak{H}) = -4\pi i \omega \, \mathfrak{H}$ . Es werden nur Kristalle mit einer einzigen Hauptachse betrachtet. Der Widerstandstensor reduziert sich dann auf die beiden Komponenten  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$ , d. h. auf die Widerstände für einen Stromfluß senkrecht und parallel zur Hauptachse des Kristalls. — In zwei Sonderfällen gestattet die obige Gleichung eine exakte Lösung. Im ersten Fall fällt die Hauptachse mit der Zylinderachse zusammen. Dieser Fall ist trivial, da  $\varrho_3$  dann keine Rolle spielt und das Verhalten in jeder Hinsicht mit dem eines isotropen Zylinders mit dem Widerstand  $\varrho_1$  identisch ist. Im zweiten Falle bildet die Hauptachse des Kristalls einen rechten Winkel mit der Zylinderachse. Die Gleichungen für  $\mathfrak{H}$  sind dann formal identisch mit denen eines isotropen Zylinders mit dem spezifischen Widerstand  $\varrho$ , dessen Querschnitt eine Ellipse mit der großen Achse  $a(\varrho/\varrho_3)^{1/2}$  und der kleinen Achse  $a(\varrho/\varrho_1)^{1/2}$  ist. Dieses Problem ist von MacLachlan gelöst worden. Es führt auf eine unendliche Reihe Matthiesscher Funktionen mit imaginärem Argument. Die Arbeit beschäftigt sich nicht mit der Herstellung dieser Lösung, es werden aber für zwei wichtige Fälle Näherungslösungen hergeleitet, die bequemer handhabbar sind, nämlich in dem Falle kleiner Anisotropie und in dem Falle hoher Frequenzen. — Zum Schluß wird noch auf die enge Verwandtschaft dieser Aufgabe mit einer ihr ähnlichen aus der Theorie der Supraleiter hingewiesen. Buchholz.

Preston, Glenn W.: Interaction between magnetized spheroids in permeable fluid media. Amer. J. Phys., Lancaster Pa. **18**, 136—139 (1950).

Kronsbein, John: The effect of insulating and conducting shields and partly stopped-off electrodes on current distribution in electrolytic cells. Proc. London math. Soc., II. S. **49**, 260—281 (1947).

Es wird die Stromverteilung in einem Elektrolyten berechnet, welcher von zwei konzentrischen oder auch exzentrischen zylinderförmigen Elektroden begrenzt wird. In dem Elektrolyten befinden sich zusätzlich noch leitende Schirmbleche oder isolierende Abschirmungen (z. B. teilweiser Wachsüberzug einer Elektrode). Da in

allen Fällen ein ebenes Problem mit geeignet gewählten Symmetrieeigenschaften vorliegt, gelangt Verf. überall mit der Methode der konformen Abbildung unter Verwendung von elliptischen Funktionen zum Ziele. *Rinow* (Greifswald).

**Liénard, A.:** *Attraction entre deux courants parallèles indéfinie.* J. Phys. Radium 11, 1—6 (1950).

Die kürzlich erfolgte gesetzliche Definition der Stromeinheit lenkt erneut die Aufmerksamkeit auf die Berechnung der Kräfte zwischen parallelen, von Gleichstrom durchflossenen Leitern. Zum mindesten ist es unerlässlich, den Genauigkeitsgrad der benutzten Formeln zu kennen. Es werden zwei unendlich lange Leiter von kreisförmigem Querschnitt mit den Radien  $a'$  und  $a''$  und den Permeabilitäten  $\mu'$  und  $\mu''$  betrachtet. Eine fremde Magnetisierung wird neben der induzierten nicht vorausgesetzt. Die Ströme in den beiden Leitern werden als verschieden angesehen und jeder von ihnen im Unendlichen als geschlossen gedacht. — Das magnetische Feld dieses Leitersystems wird von Liénard nach einer Methode berechnet, die teils auf der Inversion von Kelvin, teils auf dem alternierenden Verfahren von Schwarz beruht. Das Magnetfeld außerhalb der beiden Leiter kann dann aus der Überlagerung einer unendlichen Folge solcher einzelner Felder entstanden gedacht werden, wie sie zwei lineare Leiter mit entgegengesetzten Strömen erzeugen, deren gegenseitige Lage sich in gesetzmäßiger Weise aus den vorangegangenen Spiegelungsprozessen ergeben. Die darauf sich stützende Berechnung der Kräfte führt zu einer sehr schnell konvergenten Reihe. *H. Buchholz* (Heidelberg).

**Colombani, A.:** *Étude de la résistance en haute fréquence d'un enroulement à fil divisé.* J. Phys. Radium, VIII. S. 10, 285—294 (1949).

Es wird über eine einfache Formel für den Hochfrequenzwiderstand unterteilter Wicklungsdrähte berichtet. Sie wird aus den Maxwellschen Gleichungen unter der Annahme hergeleitet, daß der Radius eines einzelnen Litzenleiters kleiner ist als die Eindringtiefe des Stroms. Die erhaltene Formel stimmt mit den Meßergebnissen und mit den auf umständlichere Weise gefundenen älteren Formeln von Butterworth gut überein. *H. Buchholz* (Heidelberg).

**Wise, W. Howard:** *Capacity of a pair of insulated wires.* Quart. appl. Math. 7, 432—436 (1950).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der mehr numerischen Seite der Berechnung der Kapazität zweier unendlich langer, gleich großer Leiter von kreisförmigem Querschnitt, von denen jeder mit einer gleich großen, kreisringförmigen Isolationschicht umgeben ist. Den Ausgangspunkt bildet die Formel für die Kapazität zweier solcher Leiter, die vordem in drei Arbeiten von Craggs und Tauber aufgestellt worden ist [Quart. appl. Math. 3, 268—272, 380—383 (1945/46); Quart. J. Math. (Oxford Serie) 17, 138—144 (1946)]. Es wird vom Verf. vor allem die Frage der Konvergenz der in der Kapazitätsformel auftretenden unendlichen Reihe von Koeffizienten untersucht. Die Methode der sukzessiven Näherungen und die Anwendung der Fredholmschen Methode gestatten zwar, eine formale, explizite Lösung anzugeben, aber das davon verschiedene, vorgeschlagene Näherungsverfahren ist nach Ansicht des Verf. für die zahlenmäßige Berechnung besser geeignet. *H. Buchholz*.

**Ledinegg, Ernst:** *Über Rand- und Sprungwertprobleme der Maxwellschen Gleichungen.* Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 417—440 (1948).

Verf. leitet die Formeln des Huygensschen Prinzips für elektromagnetische Wellen neu ab, fußend auf der Kottlerschen Idee des Sprungwertproblems. Das Ergebnis, genau den Kottlerschen Formeln äquivalent, wird vom Verf. in eine Form gebracht, welche zeigt, daß die Sprungwerte der Vektorprodukte von  $\mathcal{E}$  und  $\text{rot } \mathcal{E}$  mit der Flächennormalen frei vorgebar sind und die gebeugte Welle eindeutig bestimmen. Im Anschluß daran werden die Maxwellschen Gleichungen für den abgeschlossenen verlustfreien Hohlraum auf zwei lineare Integralgleichungen

mit symmetrischen Kernen zurückgeführt; mit Hilfe dieser Integralgleichungen läßt sich nachweisen, daß beliebige elektromagnetische Hohlräume reelle Eigenfunktionen und reelle Eigenwerte besitzen. *W. Franz (Münster).*

**Müller, Claus:** Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1945/46, Nr. 3, 56 S. (1950).

Definition des regulären Gebietes. Wenn jeder Summand die Zeit in dem Faktor  $\exp\{-i\omega t\}$  enthält und  $\varepsilon_0 + \sigma i/\omega = \varepsilon$  gesetzt wird, sind die Maxwell'schen Gleichungen  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} = j$ ,  $\operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mu i\omega \mathfrak{H} = -j'$ ,  $\operatorname{div} j = i\omega \varrho$  und  $\operatorname{div} j' = i\omega \varrho'$ . Beschränkung auf Anfachung und periodische Vorgänge  $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ . Aus der Greenschen Formel

$$\int \{(\mathfrak{E} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \varphi a) - (\varphi a \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E})\} d\xi d\eta d\zeta = \int \{n[\varphi a \operatorname{rot} \mathfrak{E}] - [\mathfrak{E} \operatorname{rot} \varphi a]\} dF$$

folgt für  $\varepsilon$  und  $\mu = \text{const.}$  mit  $\varphi = \frac{\exp\{i\omega \sqrt{\mu \varepsilon} r\}}{r}$ ,  $r^2 = \{\xi - x\}^2 + \{\eta - y\}^2 + \{\zeta - z\}^2$  und  $a$  beliebig konstant das Huygenssche Prinzip

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \int \{\mu i\omega \varphi j - [j' \operatorname{grad} \varphi] + \frac{\varrho}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi\} d\xi d\eta d\zeta \\ - \frac{1}{4\pi} \int \{\mu i\omega \varphi [n \mathfrak{H}] + [[n \mathfrak{E}] \operatorname{grad} \varphi] + (\mathfrak{E} n) \operatorname{grad} \varphi\} dF \quad \mathfrak{H} = \dots$$

$\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  werden nur durch divergente Wellen erzeugt, wenn die folgenden Ausstrahlungsbedingungen erfüllt sind. — 1. Im Äußeren des endlichen Integrationsgebietes sind die Ströme  $= 0$ . — 2. Ein beliebiger Punkt des Integrationsgebietes sei Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius  $R$ .  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \mathfrak{E}$  und  $R \mathfrak{H}$  endlich. —

3. Kugelnormale mit  $n$  bezeichnet.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \{\sqrt{\varepsilon} [n \mathfrak{E}] - \sqrt{\mu} \mathfrak{H}\} \quad \text{und} \quad R \{\sqrt{\mu} [n \mathfrak{H}] + \sqrt{\varepsilon} \mathfrak{E}\} = 0.$$

Wenn die Ströme auf der Randfläche den Wert 0 annehmen, sind im Huygensschen Prinzip die Raumintegrale die einzige Lösung. Andernfalls kommt in  $\mathfrak{E}$  der Summand

$\frac{i}{4\pi\varepsilon\omega} \int (j n) \operatorname{grad} \varphi dF$  hinzu. Berücksichtigung der Flächenströme. Wenn im Äußeren eines regulären Gebietes die Ströme gegeben und  $\varepsilon_a$  und  $\mu_a$  konstant und im Inneren  $\varepsilon_i$  und  $\mu_i$  in endlich vielen Teilgebieten und auf deren Randflächen stetig differenzierbar sind, werden das einfallende, gespiegelte und gebrochene Feld berechnet unter der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{E}_i$  und  $\mathfrak{H}_i$  in den Teilgebieten und auf deren Randflächen stetig differenzierbar sind. Für die scheinbaren Ströme werden gekoppelte Integralgleichungen aufgestellt, in denen die Oberflächenintegrale beseitigt werden. Eindeutigkeitsbeweis, wenn  $\varepsilon$  und  $\mu$  auf der Randfläche stetig sind. Anm. d. Ref.: In Gl. (10) muß  $\varphi \times a$  durch  $\times a \varphi$  ersetzt werden. (21)  $1/\varepsilon$  durch  $1/\mu$  und  $\varrho$  durch  $\varrho'$ . (42)  $j$  durch  $-j$ . (43)  $j'$  durch  $-j'$ . (53) beide  $-$  durch  $+$ . (98) im 1.  $\int j_F$  durch  $\int j'_F$ . (100)  $\Sigma v, \tau$  durch  $-\Sigma v, \tau$ . (109) obere Zeile  $j'_F$  durch  $j_F$ . S. 23, (1) untere Zeile  $J'$  durch  $-J'$ . (9)  $\mathfrak{H}_a$  durch  $\mathfrak{H}_e$ . (16) bei  $j_F$  fehlt  $\varphi$ . (21)  $\times$  durch  $+$ . (47) und (48) folgen nicht aus (12) und (13), sondern aus (40) und (41). In (47) vor Raumintegral  $\mu_i$  durch  $\mu'_i$ ,  $\times \varphi$  durch  $\times \nabla \varphi$ ,  $\varepsilon_a - \varepsilon'_i$  durch  $(\mu_a - \mu'_i)/\mu_a$  und  $J n$  durch  $J' n$ . (48)  $\mu_a - \mu_i$  durch  $(\varepsilon_a - \varepsilon'_i)/\varepsilon_a$  und  $J' n$  durch  $J n$ . *Konrad Ludwig.*

**Maljužinec, G. D.:** Über eine Verallgemeinerung der Weylschen Formel für das Wellenfeld über einer absorbierenden Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 367—370 (1948) [Russisch].

In der Arbeit wird das Verhalten eines skalaren Wellenfeldes  $u(x, y, z)$  über einer absorbierenden Ebene  $z = 0$  untersucht. Die primären Strahlungsquellen sind im Halbraum  $z > \varepsilon > 0$  beliebig verteilt. Sie befolgen das Zeitgesetz  $e^{-i\omega t}$  und sind in der Funktion  $u_1(x, y, z)$ , die der inhomogenen Wellengleichung genügt, als gegeben anzusehen. Es besteht die Aufgabe, die reflektierte Welle  $u_2(x, y, z)$



zu finden, wenn in der Grenzebene  $z = 0$  die von M. A. Leontovic in die Elektrodynamik eingeführte Randbedingung  $\partial/\partial z (u_1 + u_2) + i k g (u_1 + u_2) = 0$  besteht. Hierin ist  $k$  die bekannte Wellenzahl und  $g$ , z. B. im elektrodynamischen Falle, gleich  $(\mu/\varepsilon)^{1/2}$ , d. h. also eine im allgemeinen komplexe Konstante. — Die allgemeine Lösung wird in der Weise hergestellt, daß zunächst der einfache Grenzfall  $|g| \rightarrow \infty$  betrachtet wird, für den die Lösungsfunktion  $v(x, y, z)$  sofort angegeben werden kann. Durch Verwendung eines besonderen Integraloperators, der unter gewissen, in der Arbeit angegebenen Bedingungen, z. B. auf die Form

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^z e^{i k g (\zeta - z)} v(x, y, \zeta) d\zeta$$

gebracht werden kann, gelingt es dann, den allgemeinen Fall eines endlichen  $g$  auf die Lösung des vorher betrachteten besonderen Falles zurückzuführen. — Zum Schluß weist der Verf. darauf hin, daß die seinerzeit von Weyl als Näherung für die Wellenausbreitung in der Grenzschicht zweier homogener Medien aufgestellte Formel die strenge Lösung der Wellengleichung unter der oben angegebenen Randwertbedingung ist. Die von Weyl gelieferte Lösung ist, anders ausgedrückt, die Greensche Funktion für die hier behandelte Aufgabe. *H. Buchholz* (Heidelberg).

**Brodin, Jean:** Espace vectoriel des ondes régulières à l'extérieur d'une surface fermée. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1388—1390 (1950).

Es wird gezeigt, daß sich jede von einer geschlossenen Oberfläche ausgehende elektromagnetische Welle in eine Reihe nach Fundamentallösungen entwickeln läßt, deren jede durch eine gewisse Belegung der Fläche mit elektrischen und magnetischen Dipolen erzeugt wird. *W. Franz* (Münster).

• **Brogie, Louis de** (sous la présidence de): Les ondes électromagnétiques centimétriques. Réunions d'études et de mises au point. Paris: Éditions de la Revue d'optique théorique et instrumentale 1949. 274 p., 800 francs.

**Clemens, George J.:** A tapered line termination at microwaves. Quart. appl. Math. **7**, 425—432 (1950).

In der Arbeit wird das Gesetz für die örtliche Stromverteilung in einem koaxialen Kabel aufgestellt, das zwischen den Querschnitten  $x = 0$  und  $x = L$  einen sich konusförmig vom Radius  $b$  auf den Radius  $c < b$  verjüngenden Außenleiter hat, während der Innenleiter mit dem Radius  $a < c$  unverändert bleibt. Die Rechnung verwendet an Stelle des linearen Gesetzes der Durchmesserabnahme ein Exponentialgesetz gemäß der Formel:  $r(x) = a \cdot (b/a)^{\exp(-kx)}$ . — Die Differentialgleichung für die Stromverteilung läßt sich dann durch Besselsche Funktionen auflösen. Zu dem gleichen Resultat führt eine andere häufig benutzte Methode, die von Schelkunoff stammt. Sie führt die Lösung der Differentialgleichung der Stromverteilung auf eine Volterrasche Integralgleichung zurück. Ihre Lösung durch die Neumannsche Reihe ist mit der unmittelbar aus der Differentialgleichung gefundenen Lösung identisch. — Um Messung und Rechnung bequem vergleichen zu können, braucht man noch eine Beziehung für den Eingangswiderstand des konischen Kabelteils. Er läßt sich, nachdem die Lösung bekannt ist, leicht berechnen. Die Ursachen für die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung werden eingehend erörtert und für den Entwurf solcher Kabelabschlüsse auch gewisse Richtlinien aufgestellt. *H. Buchholz* (Heidelberg).

**Kahan, Théo:** Application de la méthode des approximations successives de Picard à l'étude des discontinuités dans les guides d'ondes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 527—529 (1950).

Für die Lösung der Aufgabe, den Einfluß von Inhomogenitäten in Hohlleitern auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in solchen Leitern zu untersuchen, benutzt Verf. in leicht modifizierter Form eine Methode, die ihrem

Wesen nach auf Picard zurückgeht. Sie besteht darin, daß für die beiden Hilfsfunktionen, aus denen sich alle Feldkomponenten berechnen lassen, zunächst die dafür bekannten Beziehungen beim homogenen Hohlleiter gewählt werden. Mit ihrer Hilfe wird aus den Differentialgleichungen durch Integration eine erste Näherung bestimmt, auf demselben Wege aus der ersten Näherung die zweite berechnet usw. Diese sukzessiven Näherungsausdrücke werden für den Fall formuliert, daß bei kreisförmigem Hohlleiter vom Radius  $r_0$  die Inhomogenität in einer in der Ebene  $z = z_0$  einsetzenden Änderung besteht, die nach dem Gesetz

$$r_0 + \text{const.} \exp[-h(z - z_0)^2]$$

verläuft. Der Verf. ist der unbewiesenen Ansicht, daß dieses Verfahren zu hochkonvergenten Reihenentwicklungen führt. *H. Buchholz (Heidelberg).*

**Morgan jr., Samuel P.:** Mode conversion losses in transmission of circular electric waves through slightly non-cylindrical guides. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **21**, 329—338 (1950).

Es wird zunächst ein allgemeiner Ausdruck aufgestellt für die Dämpfung einer  $TE_{01}$ -Welle in einem Hohlleiter kreisförmigen Querschnitts infolge von leichten Größen- oder Gestaltsänderungen des Querschnitts. Die Wirkung solcher Änderungen in einem Hohlleiter wird statistisch erfaßt und ausgedrückt durch die quadratischen Mittelwerte der Fourier-Koeffizienten, die die Querschnittsverzerrung beschreiben. Aus den allgemeinen Formeln ergibt sich, daß die entstehenden Verluste in weitem Maße von der statistischen Verteilung der verschiedenen Arten der Verformung abhängen. Schließlich wird noch die Abhängigkeit der Verluste von der Frequenz erörtert. *H. Buchholz (Heidelberg).*

**Pélessier, René:** L'amortissement des ondes électriques transitoires ou périodiques par les causes intérieures aux conducteurs, lors de leur propagation le long des lignes aériennes. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **230**, 2162—2164 (1950).

Für ein Leitungssystem, das entweder aus zwei parallelen Drähten oder aus einem einzelnen Draht mit der Erde als Rückleitung besteht, werden im Sinne der Theorie der Laplace-Transformation die beiden Beziehungen für die örtliche Änderung von Ladung und Strom aufgestellt mit dem Ziel, daraus durch Integration die Dämpfung der Welle sowohl im Einschwingzustand wie im periodischen Betriebszustand zu bestimmen. Die Theorie verallgemeinert damit die älteren Theorien von Carson und Pollaczek, die nur für den eingeschwungenen Zustand gelten, und sie hat nach Ansicht des Verf. den Vorzug, auch einfacher zu sein. Die Dämpfung, die eine zweite Wellenfront nach einem Lauf längs einer Hochspannungsleitung von 10 km Länge erfährt, ist aus einer Figur zu ersehen. *H. Buchholz.*

**Rosen, Philip:** The propagation of electromagnetic waves in a tube containing a coaxial D. C. discharge. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **20**, 868—877 (1949).

Es wird erneut auf die schon mehrfach behandelte Aufgabe eingegangen, bei der es sich darum handelt, die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle im Innern eines unendlich langen Hohlleiters von kreisförmigem Querschnitt zu untersuchen, der zwei verschiedene, coaxial angeordnete Materialien enthält. Während aber die älteren Arbeiten dabei nur an den Fall denken, daß die Dielektrizitätskonstanten dieser beiden Materialien gleich oder größer als die des Vakuums sind, kommt es dem Verf. grade auf den Fall an, wo diese Konstanten kleiner als die des Vakuums oder gar negativ sind. Das erfordert besondere Methoden bei der Berechnung der Fortpflanzungskonstanten. Eine DK-Zahl, die kleiner ist als die des Vakuums, ist charakteristisch für Medien, die eine große Dichte von Elektronen enthalten. Den Diskussionen wird die axialsymmetrische TM-Welle zugrunde gelegt. Das Ohmsche Gesetz wird durchweg als gültig angesehen. Die Arbeit enthält u. a. Kurvendarstellungen für die Beziehung zwischen der komplexen Fortpflanzungskonstanten und der komplexen Dielektrizitätskonstanten. *Buchholz.*

**Pinney, Edmund:** Electromagnetic fields in a paraboloidal reflector. *J. Math. Phys.*, Massachusetts **26**, 42—55 (1947).

In diesem zweiten Teil einer längeren Arbeit wird das Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols, der stets im Brennpunkt eines Drehparabols steht, für die folgenden drei Anordnungen des Dipols berechnet: 1. Der Dipol liegt parallel zur Achse des Paraboloids, 2. der Dipol steht senkrecht zu dieser Achse und 3. außer dem unter 2. genannten Dipol ist auf der Achse des Paraboloids noch ein zweiter Dipol derart angeordnet (Dummy-Reflektor), daß der Hauptteil der primären Strahlung des ersten Dipols gegen die gewölbte Kuppe des Drehparabols geworfen wird. Die Lösung der Aufgabe erfordert die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten des Drehparabols und die Kenntnis einer Darstellung von  $e^{ikr}/r$  in diesen Koordinaten. Die hier gewählte Form dieser Darstellung ist eine unendliche Reihe, in der sich jeder Term aus dem Produkt zweier Funktionen zusammensetzt, von denen jede nur von einer der beiden parabolischen Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  abhängt. Unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen läßt sich dann die vollständige Lösung in bekannter Weise aus einer unendlichen Reihe von Partikularlösungen zusammensetzen. Eine Eigenwertlösung der Aufgabe, die es geben muß, wird nicht hergestellt.

*H. Buchholz* (Heidelberg).

**Mirimanov, R. G.:** Lösung der Aufgabe der Diffraktion einer ebenen elektromagnetischen Welle an einem Rotationsparaboloid von unbeschränkten Ausmaßen mit Hilfe der Laguerreschen Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **60**, 203—206 (1948) [Russisch].

In der Arbeit wird die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einem Drehparaboloid von unbegrenzter Länge und vollkommener Leitfähigkeit berechnet. Die Aufgabe erfordert die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten des Drehparabols unter Berücksichtigung der Grenzbedingung, verschwindender Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an der Oberfläche  $\eta = \eta_0$  des Drehparabols. Der Lösungsansatz wird durch eine unendliche Reihe angegeben, deren Glieder jeweils aus den Produkten dreier Funktionen bestehen, von denen jede nur von einer der drei Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  abhängt. Für die ebene Welle wird anscheinend eine von H. Bateman stammende Formel verwendet. Das gesamte Feld wird mittels zweier Hilfspotentiale und ihrer Fourier-Komponenten beschrieben. Der weitere Lösungsvorgang verläuft dann in bekannter Weise.

*H. Buchholz* (Heidelberg).

**Mirimanov, R. G.:** Lösung des Problems der Diffraktion einer sphärischen elektromagnetischen Welle an einem Rotationsparaboloid von unbeschränkter Ausdehnung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **60**, 257—360 (1948) [Russisch].

Die vorstehende Aufgabe untersucht die Beugung einer elektromagnetischen Kugelwelle an einem Drehparabol von unbegrenzter Ausdehnung und vollkommener Leitfähigkeit, wenn das Feld von einem elektrischen Dipol erregt wird, der im Brennpunkt des Parabols angeordnet ist und auf dessen Achse senkrecht steht. Für die primäre Erregung der Kugelwelle gemäß dem Ausdruck  $e^{ikr}/r$  wird ohne Herleitung eine Entwicklung in Gestalt einer dreifach unendlichen Reihe angegeben, in der jeder Term sich jeweils aus einer allein von  $\xi$  und allein von  $\eta$  abhängenden Funktion zusammensetzt. Darin sind  $\xi$  und  $\eta$  die beiden parabolischen Koordinaten. Das primäre und das reflektierte Wellenfeld wird mittels zweier Hilfsfunktionen beschrieben. Die Herstellung der Lösung gelingt dann nach der Methode der Partikularlösungen. Eine Eigenwertlösung wird nicht angegeben. *H. Buchholz*.

**Papas, Charles H.:** Radiation from a transverse slot in an infinite cylinder. *J. Math. Phys.*, Massachusetts **28**, 227—236 (1950).

Ein vollkommen leitender, unendlich langer Zylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Achse mit der  $z$ -Achse eines Zylinderkoordinatensystems zusammenfällt, enthält an seiner Oberfläche einen rechteckigen Schlitz, der senkrecht



zur Längserstreckung des Zylinders angeordnet ist. Er bildet die Öffnung eines aus dem Innern des Zylinders kommenden, besonderen rechteckigen Hohlleiters. Diesen kleineren Hohlleiter durchzieht eine Hohlleiterwelle, deren elektrisches Feld allein eine  $z$ -Komponente besitzt. — Der Verf. berechnet das aus dem Schlitz des zylindrischen Hohlleiters nach außen abgestrahlte Feld auf der Grundlage der Kirchhoffschen Vorstellung, daß die Verteilung von  $E_z$  in der Ebene des Schlitzes dieselbe ist wie im Innern des rechteckigen Hohlleiters. Es werden also sowohl alle höheren Wellentypen, die in der Ebene des Schlitzes entstehen, als auch die reflektierte Welle vernachlässigt. Das äußere Feld wird dann entsprechend dieser Annahme in bekannter Weise mittels der zugehörigen Greenschen Funktion berechnet. Die Greensche Funktion ist also hier der Bedingung unterworfen, an der Oberfläche des Zylinders mit Ausnahme des Spaltquerschnitts und überall auf der unendlich fernen Kugel zu verschwinden. Die entstehenden Integrale sind in geschlossener Form nicht auswertbar. Es kann aber wenigstens für das Fernfeld mit Hilfe der Sattelpunktmethode ein auch für numerische Zwecke brauchbarer Ausdruck hergeleitet werden, so daß es möglich ist, das Strahlungsdiagramm in der durch den Schlitz gehenden Querschnittsebene des zylindrischen Hohlleiters zu entwerfen.

*H. Buchholz* (Heidelberg).

**King, Ronald:** The theory of  $N$  coupled parallel antennas. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **21**, 94—103 (1950).

Es wird die Integralgleichungstheorie gekoppelter Antennen, wie sie von Verf. und Harrison sowie von Tay und Bouwkamp für zwei und drei gekoppelte Antennen entwickelt worden sind, auf den allgemeinen Fall von  $n$  miteinander gekoppelten Antennen erweitert, die symmetrisch in einem Kreise angeordnet sind. Der Fall von vier Antennen, die in den Ecken eines Quadrats stehen, wird ausführlich diskutiert. Eine weitere Anwendung findet die Theorie auf den Fall, daß  $n$  eng benachbarte, parallele Antennen mit phasengleichen Strömen gespeist werden.

*H. Buchholz* (Heidelberg).

**Mirimanov, R. G.:** Der komplexe Strahlungswiderstand eines Antennensystems bei Vorhandensein elektromagnetischer Wechselwirkung mit einem anderen Antennensystem. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **73**, 1177—1179 (1950) [Russisch].

**King, Ronald:** Antennas and open-wire lines. Part I. Theory and summary of measurements. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **20**, 832—850 (1949).

Die Antennen, die für gewöhnlich der Theorie zugrunde gelegt werden, denkt man sich in der Regel in der Mitte unterbrochen. In der Nahtstelle ist eine hypothetische Potentialdifferenz oder ein rotationssymmetrisches Feld wirksam. Demgegenüber werden aber in Wirklichkeit die Antennen zumeist durch angekoppelte Übertragungsleitungen gespeist. In der Arbeit wird die Kopplung einer Antenne mit einer sie speisenden Doppelleitung im Hinblick auf die Definition der Impedanz einer Antenne untersucht. Es zeigt sich, daß eine physikalisch bedeutsame Impedanz nur außerhalb des Leitungsteils definiert werden kann, in dem die Verbindung von Leitung und Belastung erfolgt. Es werden die verallgemeinerten Stromspannungsgleichungen, die die Kopplung und den Einfluß der Enden berücksichtigen, in der Form von Integrodifferentialgleichungen aufgestellt und wenigstens annähernd gelöst, und zwar 1. für eine Antenne, deren Strahlungsbügel in der Ebene einer Doppelleitung und an ihrem Ende liegen, 2. für eine Antenne, deren Strahlungsbügel in der Ebene einer von beiden Enden her gespeisten Doppelleitung, aber in deren Mitte liegen und 3. für eine Antenne, deren Strahlungsbügel senkrecht zur Ebene der Doppelleitung und an ihrem Ende angeordnet sind. Die Endeffekte und die Kopplungseffekte werden durch positive oder negative konzentrierte Kapazitäten am Ende der idealen Übertragungsleitung berücksichtigt. *H. Buchholz*.

**Roubine, Élie:** Sur les propriétés directives des antennes de réception. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **230**, 1590—1592 (1950).

Auf der Grundlage des Reziprozitätstheorems werden die Voraussetzungen diskutiert, die notwendig gemacht werden müssen, um die These von der Identität der Richtungscharakteristik einer Sende- und einer Empfangsantenne im Falle elliptisch polarisierter Wellen in richtiger Weise zu verallgemeinern. Für verschiedene Eigenschaften der Empfangsantennen werden Formeln angegeben.

*H. Buchholz (Heidelberg).*

**Kahan, Th. und G. Eckart:** Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem atmosphärischen Wellenleiter. *Z. Naturforsch.* 5a, 334—342 (1950).

Die Verf. lösen das folgende Strahlungsproblem: Über der vollkommen leitenden, ebenen Erdoberfläche steht in der Höhe  $z = \zeta$  ein vertikaler mathematischer Dipol. Das von ihm ausgestrahlte Feld hat demnach in Zylinderkoordinaten die Komponenten  $E_\varphi$ ,  $H_\theta$  und  $H_z$ . In der Höhe  $z = h > \zeta$  ändert sich von den beiden Konstanten  $\mu$  und  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante von ihrem bis dahin konstanten Wert  $\varepsilon_1$  sprunghaft auf den dann weiterhin wieder konstanten Wert  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ . Der für die Ausbreitung der elektromagnetischen Strahlung zur Verfügung stehende Halbraum hat also geschichtete Struktur. — Die Herstellung der Lösung für den eingeschwungenen Zustand macht unter diesen Annahmen keine Schwierigkeit. Sie wird für die drei Schichten  $0 < z < \zeta$ ,  $\zeta < z < h$  und  $h < z < \infty$  in Form von uneigentlichen Integralen angegeben, die bis auf die kompliziertere Zusammensetzung der Integranden den bekannten Sommerfeldschen Integralen ähneln. Die Auflösung der Integrale geschieht für das Fernfeld durch Umformung der Integrationswege, im allgemeinen Fall durch Entwicklung der Nennerfunktion in unendliche Reihen. Dies führt bekanntlich zu der physikalischen Deutung, daß das totale Strahlungsfeld durch Überlagerung der Strahlungen unendlich vieler gespiegelter Dipole zustande kommt.

*H. Buchholz (Heidelberg).*

**Finzi, Bruno:** Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 5, 203—211 (1948).

L'A. traduit, sous forme intégrale, au moyen de la formule générale de Stokes, les équations de Maxwell-Lorentz. Au tenseur champ électromagnétique  $F_{\alpha\beta}$  correspond la forme quadratique extérieure  $\omega = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ . La première équation de Maxwell-Lorentz exprime la nullité de la différentielle extérieure  $d\omega$ . Par suite, si l'espace-temps a la topologie euclidienne, cette première équation se traduit par  $\int_D \omega = 0$ , où  $D$  est un 2-domaine fermé arbitraire. La seconde équation exprime que le flux du tenseur champ électromagnétique est égal à l'impulsion de la distribution électrique. Dans le cas où cette distribution est nulle, la forme  $\omega$  est harmonique.

*Lichnerowicz (Paris).*

**Ivanenko, D. und A. Sokolov:** Zur Theorie des „leuchtenden“ Elektrons. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 59, 1551—1554 (1948) [Russisch].

Es wird die Energieausstrahlung eines Elektrons berechnet, welches sich gleichförmig auf einem Kreise bewegt. Die elektromagnetischen Potentiale werden mittels der  $\delta$ -Funktion dargestellt und in eine Fourierreihe entwickelt. Für den Anteil  $w_n$  der Energieausstrahlung, der auf die Frequenz  $n\omega$  ( $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit des Elektrons) entfällt, wird ein Ausdruck angegeben, der mit einem früher von G. Schott (Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912, S. 109) auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt. Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdrucks wird noch eine asymptotische Näherung für Besselfunktionen abgeleitet:

$$J_{2n}(x) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\xi}{3}} K_{1/3} \left( \frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2} \right), \quad x = 2n(1 - \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

*Rinow (Greifswald).*

**Hinteregger, Hans:** Eine allgemeine Theorie des Betatrons. (In Erweiterung auf Magnetfelder, welche in Zeit- und Ortsabhängigkeit nicht separierbar sind.) Österreich. Akad. Wi.s., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 299—334 (1948).

In der normalen Theorie des Betatrons wird der Verlauf des Magnetfeldes immer als in Raum und Zeit „separierbar“ angenommen. Man kommt dann auf die Existenz eines „Sollkreises“, auf welchem das Elektron beschleunigt werden kann, ohne seinen Bahnradius zu ändern. In der vorliegenden Arbeit werden die Betrachtungen auf ein nichtseparierbares Magnetfeld ausgedehnt. Untersucht wird das Feld der Radialgeschwindigkeit der Gesamtheit aller Elektronen  $\dot{r} = \dot{r}(r, t)$ . Auch jetzt ergibt sich die Existenz einer Näherungs-Gleichgewichtsbahn, die als „Momentankreis“ bezeichnet wird und welche die Nulllinie für radiale Deformations-schwingungen darstellt. Zu verschiedenen Impulsen der Elektronen gehören verschiedene Momentankreise, diese wandern also allmählich. Ein ausgezeichneteter Momentankreis, der stillsteht, wird als „Optimalkreis“ eingeführt. Auf ihm muß die bekannte 1:2-Bedingung für das Feld ständig erfüllt sein. Bei separierbaren Feldern fällt er mit dem „Sollkreis“ zusammen, bei nichtseparierbaren wandert er allmählich. Das Verhalten der Momentankreise zum zugehörigen Optimalkreis gibt das Kriterium der Stabilität: der „fokussierende“ Optimalkreis zieht die Momentankreise an, der „defokussierende“ stößt sie ab. — Die theoretischen Betrachtungen werden auf verschiedene Arten von Ausschleußvorgängen angewendet und es wird die Frage diskutiert, ob und wie weit die betrachteten allgemeinen Felder praktische Bedeutung haben könnten. Es könnte sich dabei u. U. die Ausbeute wesentlich günstiger gestalten, so daß durchaus eine lohnende experimentelle Aufgabe vorliegt.

Volz (Erlangen).

**Kaiser, T. R.:** On the capture of particles into synchrotron orbits. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 63, 52—66 (1950).

D. Bohm und L. Foldy [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 70, 249 (1946)] haben die Behandlung der Phasenstabilität im Synchrotron auf die stabilen Bewegungen eines physikalischen Pendels unter der zusätzlichen Einwirkung eines konstanten Drehmomentes zurückgeführt. Von F. K. Goward (A.E.R.E. Report Nr. G/R 191, 1947) wurde damit die Einfangung der Teilchen beim Übergang von der Betatronbeschleunigung zur Synchrotronbeschleunigung bei plötzlichem Einschalten der Beschleunigungsspannung untersucht. Verf. bestimmt den Bruchteil der eingefangenen Teilchen, wenn die Beschleunigungsspannung während einer endlichen Zeit von Null auf ihren maximalen Wert anwächst. Es zeigt sich, daß bei genügend langsamem Anwachsen beinahe 100% der Teilchen, unabhängig von ihrer Eintrittsphase in den Beschleunigungsspalt eingefangen werden. Glaser.

**Brunel, Antoine:** Mouvement d'une particule électrisée dans le champ magnétique d'un courant. Rev. sci., Paris 86, 345—347 (1948).

Es wird die Bahn eines Elektrons im Felde eines linearen, stromdurchflossenen Leiters berechnet. Die Bahnkurven werden näher untersucht. Verf. erhält folgendes Ergebnis: Wie auch immer die Anfangsbedingungen gewählt werden, das Elektron bleibt immer in einer Umgebung des Leiters und bewegt sich im Mittel längs des Leiters im entgegengesetzten Sinne der Stromrichtung. Rinow (Greifswald).

• **Guillemin, E. A.:** The mathematics of circuit analysis. New York: Wiley 1949. XIV, 590 p., \$ 7,50.

**Duffin, R. J.:** Nonlinear electrical networks. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 2 (Massachusetts Institute of Technology July 29—31, 1948. Electromagnetic theory), 66—70 (1950).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen [Bull. Amer. math. Soc. 52, 833—838 (1946) und dies. Zbl. 32, 229, 230] berichtet Verf. über nichtlineare Netzwerke, die er „reliable“ nennt, und deren charakteristische Eigenschaft ist, mit den linearen Netzwerken bezüglich der Eindeutigkeit der Lösung übereinzustimmen. Darunter



sind enthalten: I. Direkte Stromnetzwerke (nur nichtlineare Widerstände), II. Variable Stromnetzwerke (nichtlineare Widerstände, lineare Induktivitäten und Kapazitäten), III. Nichtlineare Induktoren, deren Behandlung durch Integration auf die früheren Fälle zurückgeführt wird. Den Schluß bildet ein interessanter Ausblick auf allgemeine „reliable“ Operatoren. *Schmeidler (Berlin).*

**Duffin, R. J.: Nonlinear networks. IV.** Proc. Amer. math. Soc. **1**, 233—240 (1950).

Es handelt sich um Transformatoren mit ferromagnetischen Kernen (bei denen von der Hysterese abgesehen wird) und mit Ohmschen Widerständen, die als elektrische Netzwerke aufgefaßt werden. Es zeigt sich, daß, wie im Falle linearer Netzwerke, unter gegebenen elektromotorischen Kräften die entstehenden Ströme nach einer genügend großen Anlaufzeit eindeutig bestimmt sind; wenn die elektromotorischen Kräfte periodisch sind, so ergibt sich ein eindeutig bestimmter periodischer Stromvektor. Um dies zu zeigen, werden die Netzwerkgleichungen nach der Zeit integriert. Dann sieht man, daß die integrierten Gleichungen dieselbe Form haben wie die Netzwerkgleichungen mit linearen Kapazitäten und nichtlinearen Widerständen. Da die Ableitungen der Permeabilitäten zwischen festen positiven Grenzen liegen, wird die Untersuchung damit auf die früher behandelten Fälle mit quasilinearen Widerständen zurückgeführt [vgl. Duffin, Bull. Amer. math. Soc. **52**, 833—838 (1946) und dies. Zbl. **32**, 230]. *Schmeidler (Berlin).*

**Gladwin, A. S.: Energy distribution in the spectrum of a frequency modulated wave. II.** Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **38**, 229—251 (1947).

Das Problem besteht darin, die Verteilung der Energie über das Spektrum einer frequenzmodulierten Welle zu berechnen, wenn die Energieverteilung im Spektrum der modulierenden Welle gegeben ist. Im ersten Teil der Arbeit [Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. **35**, 797—802 (1944)] hat Verf. die folgende Methode entwickelt. Er geht von der Bemerkung aus, daß man durch geeignete Wahl der Amplituden  $a_m$  jede mögliche Energieverteilung durch eine modulierende Welle der Gestalt  $S = \sum_{m=1}^q a_m \cos \omega_m t$  mit beliebiger Genauigkeit darstellen kann, wenn nur  $q$  genügend groß gewählt wird. Die Frequenzen  $\omega_m$  werden als linear unabhängig vorausgesetzt. Die zu  $S$  gehörige frequenzmodulierte Welle besitzt eine Fourierentwicklung (im Sinne der Theorie der fastperiodischen Funktionen), deren Amplituden Produkte von Besselfunktionen sind. Die hieraus leicht zu erhaltenden Ausdrücke für die Energieverteilung können in gewissen Grenzfällen, die von praktischer Bedeutung sind, beträchtlich vereinfacht und für die numerische Auswertung brauchbar gemacht werden. — Die Anwendung dieser Berechnungsmethode auf die Sprachübertragung führt zu erheblichen Abweichungen von den Meßergebnissen. Den Grund dafür sieht Verf. darin, daß einmal in dem obigen Ansatz nicht die zeitliche Verteilung der Amplituden der gegebenen modulierenden Welle eingeht, und daß zum anderen die Voraussetzung der Unabhängigkeit der  $\omega_m$  nicht zutreffend ist. Verf. macht daher im zweiten Teil der Arbeit den folgenden Ansatz: Die modulierende Welle wird in der Form  $f_m(t) = f_a(t) S_1(t)$  mit  $S_1 = \sum_{m=1}^M A_m \sum_{r=1}^R a_{mr} \cos \omega_{mr} t$  dargestellt. Dabei wird angenommen, daß für jedes feste  $m$  die  $\omega_{mr}$  wieder unabhängig sind und alle in einer Umgebung des Mittelwertes  $\omega_m$  liegen. Die  $\omega_m$  brauchen nicht mehr unabhängig zu sein, können vielmehr Vielfache einer Grundfrequenz sein.  $f_a(t)$  bedeutet eine geeignet gewählte Amplitudenmodulation von  $S_1(t)$ , von der angenommen wird, daß die in  $f_a(t)$  auftretenden Frequenzen klein gegenüber den  $\omega_m$  sind. Verf. geht nun so vor, daß er zunächst die Energieverteilung der durch  $S_1(t)$  allein frequenzmodulierten

Welle berechnet. Dabei kann jede zu einem Mittelwert gehörige Wellengruppe von  $S_1$  nach den Methoden des ersten Teiles der Arbeit für sich allein behandelt werden. Der Einfluß von  $f_a(t)$  auf die Energieverteilung in den Seitenbändern kann nun nachträglich berücksichtigt werden. Dabei braucht von  $f_a(t)$  nur die zeitliche Amplitudenverteilung bekannt zu sein. Die Größen  $A_m$  und  $a_{m,r}$  sind durch die Energieverteilung in der modulierenden Welle allein bestimmt. Die Bestimmung der Amplitudenverteilung von  $f_a(t)$  aus der gegebenen modulierenden Welle führt auf eine Integralgleichung. Verf. geht jedoch hierauf nicht näher ein; er erhält vielmehr durch eine Art Probiermethode für die Amplitudenverteilung von  $f_a(t)$  eine den praktischen Anforderungen genügende Näherung. *Rinow.*

### Optik:

**Gans, Ricardo:** Einfache Ableitung der Theorie des Eikonals. *Rev. Un. mat. Argentina* **14**, 3—15 (1949) [Spanisch].

Dans ce papier, l'A. donne un exposé élémentaire nouveau de la seconde approximation des équations fondamentales de l'optique, à partir des variables de Seidel. Pour un système admettant un axe optique, il rappelle dans ce formalisme les équations de l'optique gaussienne, puis passe à l'approximation suivants en faisant intervenir une fonction perturbatrice  $S$  qui est du 4<sup>e</sup> degré par rapport écarts linéaires et angulaires à l'axe optique. La méthode employée est présentée avec le souci de se rapprocher des méthodes de perturbation des astronomes.

*Lichnerowicz (Paris).*

**Armsen, Paul:** Über die Strahlenbrechung an einer einfachen Sammellinse. *I. J. reine angew. Math.* **187**, 193—221 (1950).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit von Carathéodory leitet der Verf. eine geschlossene Formel ab, die die Blendenabbildung in der Objektebene für den Fall einer einzelnen Sammellinse ohne Zusatzlinse mit größerer Genauigkeit darstellt, als sie durch die Theorie der Fehler 3. Ordnung erreicht wird. Ausgehend von der Brechung an einer einzelnen Fläche, erlaubt die hierfür abgeleitete Formel 1.) den Gaußschen Bildpunkt selbst, 2.) die Bildfehler 3. Ordnung als erste Korrektur (Seidelstufe), 3.) die Bildfehler 5. Ordnung als zweite Korrektur (Herzbergerstufe) zu berechnen. Für die brechende Fläche, die als rotationssymmetrisch vorausgesetzt wird, wird die Reihendarstellung bis einschließlich der 6. Potenz des Blendenradius zugrunde gelegt. Nach Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für den Schnittpunkt des Lichtstrahles mit der Bildebene unter Benutzung des Fermatschen Prinzips werden die Formeln für die tangentialen sowie für die radiale Abweichung abgeleitet. Die erhaltene Formel wird in üblicher Art nach der Abhängigkeit von den verschiedenen hohen Potenzen des Blendenradius und des Achsenabstandes des Objektes in die charakteristischen Teilfehlerausdrücke zerlegt. Man erhält also die 5 Bildfehler 3. Ordnung sowie 12 Bildfehler 5. Ordnung. Verf. diskutiert näher die Aussage von Schwarzschild, nach der es nur 9 Bildfehler 5. Ordnung geben soll, und weist erneut darauf hin, daß bei Schwarzschild der Abstand des Durchgangspunktes durch die brechende Fläche von der Tangentialebene im Scheitel vernachlässigt wurde, also nur die Fehler 5. Ordnung im Gaußschen Raum bestimmt wurden. Im Zusammenhang hiermit werden auch die Arbeiten von Kerber und Kohlschütter kurz diskutiert. — Die vom Verf. abgeleitete Formel wird zahlenmäßig auf die Brechung an einer Fläche angewandt und die zahlenmäßig erhaltenen Werte für die Durchstoßungspunkte der Strahlen mit der Bildebene mit den entsprechenden Werten verglichen, die sich auf Grund der trigonometrischen Durchführung ergeben. Insbesondere wird an einzelnen Fällen die Abweichung des Näherungswertes der Seidelstufe bzw. der Näherung der Herzbergerstufe von den zugehörigen trigonometrischen Durchstoßungspunkten berechnet, und zwar für die drei Azimute  $\vartheta = 0^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $180^\circ$ . Als weiteres Zahlenbeispiel wird die Spiegelung an einem parabolischen Hohlspiegel für unendliche entfernte Objektpunkte behandelt. Ein 3. Beispiel behandelt den Fall, daß die brechende Fläche eine Kugelhälfte ist. Es folgt noch eine eingehende Diskussion über die Anzahl der Bildfehler 5. Ordnung, wobei besonders auf die drei Zusatzfehler eingegangen wird und festgestellt wird, unter welchen Voraussetzungen diese drei Zusatzfehler verschwinden. *Picht (Potsdam).*

**Linfoot, E. H. and P. A. Wayman:** On the aberrations of the field-flattened Schmidt camera. *Monthly Not. astron. Soc., London* **109**, 535—556 (1949).

In der Arbeit wird eine allgemeine Aberrationstheorie der bildfeldgeebneten Schmidt-Kamera entwickelt. Es wird ein Vergleich der optischen Abbildungsgüte



der bildfeld-geebneten Schmidt-Kamera und der einfachen Schmidtschen Kamera in einem typischen Spezialfall durchgeführt. Zunächst wird die Aberrationstheorie der Schmidtschen Korrektionsplatte kurz rekapituliert und die Koma außerhalb der Achse, die einer gegebenen Verschiebung der Korrektionsplatte längs der Achse entspricht, berechnet. Sodann wird die Aberration, die durch einen Feldebener eingeführt wird, berechnet und die Aberrationsfunktion für das System, das durch Hinzufügung eines Feldebeners zu einem einfachen Schmidt-System erzeugt wird, abgeleitet. Es wird ferner die Frage der gegenseitigen Aufhebung der restlichen Aberrationen behandelt, der Betrag der Plattenverschiebung, der nötig ist, die Koma über dem Bereich eines gegebenen Feldes aufzuheben, bestimmt, und es wird gezeigt, daß nichts Wesentliches gewonnen wird, wenn man von der strengen Erfüllung der Petzval-Summe abweicht. Durch Bestimmung der Isophoten, die axialen und außer-axialen Objektpunkten bei einer Schmidt-Kamera vom Öffnungsverhältnis  $f/3$  entsprechen, die mit einem Bildfeld von  $5^\circ$  arbeitet, wird die Abbildungsgüte für die Fälle verglichen, daß 1. der Schmidt-Kamera ein Feldebener hinzugefügt wird und die Korrektionsplatte neu justiert wird, und daß 2. Korrektionsplatte und Feldebener von vornherein gemeinschaftlich berechnet werden. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die Hinzufügung eines Feldebeners die Abbildungsgüte dadurch erniedrigt, da die Farbenkorrektion nicht genügend ist. In der unveränderten bildfeld-geebneten Schmidt-Kamera sind die Aberrationen nicht viel größer als in der gewöhnlichen Schmidt-Kamera, doch tritt ein kleiner Komafehler auf. *Picht.*

Weinstein, W.: Wave-front aberrations of oblique pencils in a symmetrical optical system: refraction and transfer formulae. Proc. phys. Soc. London, Sect. B 62, 726—740 (1949).

Es handelt sich in vorliegender Arbeit um die theoretische Berechnung der Wellenflächenaberrationen, die zu einem das optische System unter endlicher Neigung gegen die Systemachse durchsetzenden Strahlenbündel gehören. Mit Bezug auf den Hauptstrahl dieses Bündels als  $x$ -Achse und dem auf dieser  $x$ -Achseliegenden sagittalen Bildpunkt läßt sich die Abweichung der Wellenfläche von der diese im  $x$ -Achsen Schnittpunkt berührenden Kugelfläche um den sagittalen Bildpunkt darstellen durch

$$W' = B_{22} \varrho^2 \cos^2 \Phi + B_{31} \varrho^3 \cos \Phi + B_{33} \varrho^3 \cos^3 \Phi + B_{40} \varrho^4 + B_{42} \varrho^4 \cos^2 \Phi + B_{44} \varrho^4 \cos^4 \Phi,$$

worin  $\varrho$  und  $\Phi$  Apertur-Radius und Azimuth in der Ebene senkrecht zum Hauptstrahl sind. Die allgemeine Darstellung der Wellenfläche ist

$$x = \frac{1}{2t} y^2 + \frac{1}{2s} z^2 + C_{30} y^3 + C_{12} y z^2 + \left( \frac{1}{8t^3} + C_{40} \right) y^4 + \left( \frac{1}{4t^2 s} + C_{22} \right) y^2 z^2 + \left( \frac{1}{8s^3} + C_{04} \right) z^4 + \text{Glieder 5. und höheren Grades.}$$

(Für die Kugelwelle ist  $t = s$  und alle  $C_{lm} = 0$ ), so daß sich die Koeffizienten  $B_{ik}$  von  $W'$  durch die sagittale Schnittweite  $s$ , die tangentielle Schnittweite  $t$ , den Brechungsindex  $n$  und die Koeffizienten  $C_{lm}$  darstellen lassen. Aus der Eigenschaft der Wellenflächen, Flächen gleicher optischer Weglänge zu sein, ergibt sich, daß die Abstände  $q$  bzw.  $q'$  der einfallenden bzw. der gebrochenen Wellenfläche von der brechenden Fläche, gemessen längs eines einfallenden bzw. des zugehörigen gebrochenen Strahles, multipliziert mit dem zugehörigen Index  $n$  bzw.  $n'$ , einander gleich sein müssen, daß also  $nq = n'q'$  oder  $\Delta(nq) = 0$  sein muß. Es ist also notwendig,  $q$  als Funktion des Abstandes  $p$  des Schnittpunktes (Strahl/brechende Fläche) vom Schnittpunkt (Wellenfläche/brechende Fläche) und der Neigung  $i$  des Hauptstrahles des einfallenden Bündels gegen den zugehörigen Radius der brechenden Fläche sowie als Funktion der Richtungscosinus zu bestimmen, wobei diese durch die Koeffizienten  $C_{lm}$  auszudrücken sind. Da  $\Delta(nq) = 0$  für alle  $p$ -Werte gelten muß, müssen die verschiedenen Potenzen von  $p$  verschwinden. Es ergeben sich so die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta(n \sin i) &= 0 & (\text{Snelliussches Brechungsgesetz}), \\ \Delta n \left( \frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{t} \right) &= 0 & \text{Gleichung für den Verlauf des } t\text{-Büschels} \end{aligned}$$

$$\Delta(n C_{30} \cos^3 i) = \Delta \left\{ \frac{n \sin i}{2t} \left( \frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{t} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \Delta(n C_{40} \cos^4 i) &= \Delta n \left\{ \frac{3}{2} \sin i \cos i \left( \frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{t} \right) C_{30} + \frac{1}{8t} \left( \frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2t^2} \sin^2 i \left( \frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{t} \right) - \frac{1}{8r^2 t} \sin^2 i \right\}. \end{aligned}$$



$$An\left(\frac{\cos i}{r} - \frac{1}{s}\right) = 0 \quad (\text{Gleichung für den Verlauf des } s\text{-Büschels})$$

$$A(nC_{04}) = An\left\{\frac{C_{12}^2}{2r} \sin i + \frac{1}{8s}\left(\frac{\cos i}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 + \frac{1}{8r^2} \sin^2 i \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)\right\}$$

$$A(C_{12} n \cos i) = An\left\{\frac{1}{2rt} \sin i \cos i - \frac{1}{2s^2} \sin i\right\}$$

$$\begin{aligned} A(C_{22} n \cos^2 i) = An\left\{\frac{1}{2} \sin i \left(\frac{1}{r} - \frac{2 \cos i}{t} - \frac{4 \cos i}{s}\right) C_{12} \right. \\ \left. - \frac{3}{2r} C_{30} \sin i \cos^2 i + \frac{1}{2rt^2} \cos i \sin^2 i - \frac{1}{4rt^2} \cos^3 i - \frac{1}{4r^2t} \sin^2 i \right. \\ \left. + \frac{1}{8r^3} \cos i - \frac{1}{2s^3} \sin^3 i - \frac{1}{4rs^2} \cos i + \frac{1}{4s^2t} \cos^2 i\right\}. \end{aligned}$$

Zu diesen Formeln kommen noch die „Übergangsformeln“ (von einer brechenden Fläche zur nächsten)

$$C_{30} = \left(\frac{t'}{t}\right)^3 C'_{30}, \quad C_{12} = \frac{t'}{t} \left(\frac{s'}{s}\right)^2 C'_{12}, \quad C_{40} = \left(\frac{t'}{t}\right)^4 \left\{C'_{40} + \frac{9}{2} \frac{d' \cdot t'}{t} C'_{30}\right\},$$

$$C_{22} = \left(\frac{t' s'}{ts}\right)^2 \left\{C'_{22} + 3 \frac{d' \cdot t'}{t} C'_{12} C'_{30} + 2 \frac{d' \cdot s'}{s} C'_{12}\right\},$$

$$C_{04} = \left(\frac{s'}{s}\right)^4 \left\{C'_{04} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d' \cdot t'}{t} C'_{12}\right\},$$

in denen sich die „gestrichenen“-Größen auf die „bildseitigen“ Ausdrücke einer Fläche, die „ungestrichenen“-Größen auf die „objektseitigen“-Ausdrücke der im Abstand  $d'$  folgenden Fläche beziehen, wobei noch  $t = t' - d'$  und  $s = s' - d'$  ist. Diese Übergangsformeln sind notwendig, um aus den „bildseitigen“- $C$ -Ausdrücken einer Fläche die „objektseitigen“- $C$  für die jeweils folgende Fläche zu berechnen.

*Picht* (Bakelsterg).

**Brodin, Jean:** Cas singulier du problème de Huyghens. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1345—1347 (1950).

Die vom Verf. angegebenen Integralgleichungen für das Huyghenssche Prinzip (dies. Zbl. 34, 126) sind eindeutig lösbar, wenn die homogenen Gleichungen (also für äußeres Feld gleich null) keine von null verschiedene Lösung besitzen. Verf. zeigt zunächst, daß entweder die beiden homogenen Gleichungen (für die elektrische und die magnetische Dipolbelegung) Lösungen besitzen, oder keine von beiden. Sodann werden unter der Annahme, daß dieser singuläre Fall vorliegt, Beziehungen abgeleitet, welche jeder singulären magnetischen Belegung eine ebensolche elektrische zuordnen, schließlich aber doch auf reguläre Integralgleichungen führen.

*W. Franz* (Münster).

**Braunbek, Werner:** Neue Näherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm. Z. Phys., Berlin 127, 381—390 (1950).

Verf. diskutiert zunächst neben der Kirchhoffschen Näherung eine Reihe weiterer in den letzten Jahren von verschiedenen Verfassern angegebener Näherungsmethoden des Problems der Beugung einer skalaren Welle an einem ebenen Schirm mit Öffnung bzw. an einer ebenen Scheibe. Er kommt zu dem Ergebnis, daß alle diese Näherungsmethoden für kleine Wellenlängen keine genauen Resultate liefern, selbst die in Einzelfällen bekannten strengen Lösungen nicht, da ihre Reihen in diesen Fällen (kleine Wellenlängen) sehr schlecht konvergieren. Er entwickelt aus diesem Grunde ein neues Näherungsverfahren, das von vornherein auf kleine Wellenlängen zugeschnitten ist, und das von Ersatzrandwerten auf dem Schirm Gebrauch macht, die der Sommerfeldschen strengen Lösung der Beugung an der Halbebene entnommen wurden. Nach den Untersuchungen des Verf. geht dieses Verfahren in seinen Ergebnissen wesentlich über die Kirchhoffschen Näherungen hinaus. In einer späteren Arbeit soll es auf ein spezielles Problem angewandt werden.

*Picht.*

**Braunbek, Werner:** Zur Beugung an der Kreisscheibe. Z. Phys., Berlin 127, 405—415 (1950).

Die in der vorsteh. referierten Arbeit angegebene neue Näherungsmethode zur

Bestimmung des Beugungsfeldes einer skalaren Welle an einer ebenen Scheibe wird in vorliegender Arbeit auf die kreisförmige Scheibe und auf die Beugung an einem unendlich ausgedehnten Schirm mit kreisförmiger Öffnung angewandt, wobei auf der Oberfläche der Scheibe beiderseitig für die Wellenfunktion  $u$  die Randbedingung  $\partial u / \partial z = 0$ , für die kreisförmige Öffnung im unendlich ausgedehnten Schirm die Randbedingung  $u = 0$  gilt. Es wird Bezug genommen auf eine strenge Lösung des Problems, die von Bouwkamp gegeben wurde. Für Punkte auf der Achse liefert die vom Verf. entwickelte Näherungsmethode bis beliebig nahe an die Scheibe heran sehr einfache Ausdrücke, die mit der strengen Lösung wesentlich besser übereinstimmen als die Werte der Kirchhoffschen Näherung. Für das Fernfeld ergeben sich gleichfalls einfache Formeln, die gegenüber den üblichen Formeln charakteristische Abweichungen zeigen. Anschließend berechnet Verf. auch den Transmissionskoeffizienten, definiert als das Verhältnis der tatsächlich durch die beugende Öffnung hindurchgehenden Wellenenergie zu der geometrisch auf die Öffnungsfläche auffallenden Energie. Vom Standpunkt der Beugung an der Scheibe bedeutet er die halbe Energie, die von der beugenden Scheibe aus der einfallenden ebenen Welle entnommen und als Beugungswelle nach allen Richtungen zerstreut wird, dividiert durch die geometrisch auf die Scheibe auffallende Energie. Infolge der mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Berechnung der Transmissionskoeffizienten unter Zugrundelegung der neuen Näherungsmethode auftreten, kommt Verf. hier nicht über die Kirchhoffsche Näherung hinaus. *Picht* (Babelsberg).

**Meixner, J. und W. Andrejewski:** Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. *Ann. Phys.*, Leipzig, VI. F. 7, 157—168 (1950).

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden ebenen Kreisscheibe wird durch Entwicklung des Hertzschen Vektors nach Sphäroid-Funktionen streng gelöst. Für den Hertzschen Vektor muß man inhomogene Randbedingungen zulassen, deren Gestalt sich aus der Kantenbedingung (Endlichkeit der Energie in der Umgebung der Kante) ergibt; hierin besteht der wesentliche Fortschritt der vorliegenden Untersuchungen gegenüber der älteren Arbeit von Möglich [*Ann. Physik* V. F. 83, 609 (1927)], welcher mit homogenen Randbedingungen arbeitet und daher die Kantenbedingung nicht erfüllt. — Für lange, senkrecht einfallende Wellen werden Feld und Stromverteilung auf der Scheibe näher untersucht. — Wegen der Gültigkeit des Babinet'schen Prinzips ist das komplementäre Beugungsproblem, der Durchgang durch eine kreisförmige Öffnung in einer unendlichen, vollkommen leitenden Ebene, mit erledigt. | *W. Franz.*

**Miles, J. W.:** On the diffraction of an electromagnetic wave through a plane screen. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 20, 760—771 (1949).

Verf. gibt zunächst eine ausführliche Übersicht über die sehr umfangreiche Literatur, die sich mit der strengen Lösung der Beugung einer elektromagnetischen bzw. akustischen Welle an der geradlinigen, kreisförmigen oder elliptischen Berandung eines ebenen Schirmes beschäftigt, wobei der vom Schirm bedeckte Teil endlich oder unendlich ausgedehnt und entsprechend der durchlässige Teil der Ebene unendlich oder endlich ausgedehnt sein kann, beide Bereiche zusammen aber die (unendliche) Ebene ausfüllen (3 Fälle!). Wir müssen uns darauf beschränken, die Überschriften der — verhältnismäßig kurzen — Abschnitte der Arbeit, z. T. mit einigen Bemerkungen, hier anzugeben, die übrigens bereits einen guten Überblick über den Inhalt der Arbeit geben. 1. Einleitung (Literaturübersicht); 2. Grundlagen des Problems (Maxwellsche Gleichungen usw.); 3. Grenzbedingungen (auf Schirm und Schirmöffnung); 4. Grundlösungen der Wellengleichungen (transversale magnetische und transversale elektrische Wellen; Eigenfunktionen  $\Phi_1(u, v)$  für das transversale elektrische Feld, die den Eigenwerten  $\lambda$  der Wellengleichung zugeordnet sind); 5. Vektortransformationen (Zusammenhang des elektrischen Feldes  $f(u, v)$  innerhalb der Öffnung des Schirmes und der Funktion  $F(\lambda)$ , die seine Verteilung im  $\lambda$ -Spektrum darstellt); 6. Gesamtfelder (Lösung der Maxwellschen Gleichungen für das transversale Feld auf beiden Seiten des Schirmes); 7. Transformierte Integralgleichung; 9. Durchgelassene Energie; 10. Öffnungsimpedanz; 11. Variationsformulierung (die Integralgleichung des Feldes innerhalb der Öffnung wird so umgeschrieben, daß sie als eine Variationsgleichung angesprochen

werden kann, in dem Sinne, daß sowohl ihr Real- als auch ihr Imaginärteil stationär ist im Hinblick auf Variationen der Real- und Imaginärteile von  $f(u, v)$  bzw.  $F(\lambda)$ ; der Beweis wird in einem besonderen Anhang gegeben); 12. Komplementäre Formulierung; 15. Einfallende ebene Welle (da jede beliebige Welle durch Überlagerung ebener Wellen darstellbar, wird eine solche näher behandelt); 16. Kirchhoffsche Resultate (für die Kirchhoffsche Approximation gibt die Variationsformulierung ein Resultat, das das Reziproke des von der Kirchhoffschen Theorie vorausgesagten ist, wenn die Reaktanzglieder, d. h. die stehenden Wellen in der Nachbarschaft der Öffnung vernachlässigt werden. Nur bei unendlicher Frequenz werden beide Resultate übereinstimmend); 17. Zweidimensionale Probleme; 18. Beugung durch einen Spalt (in graphischen Darstellungen werden für senkrechten und schiefen Einfall die Lösungen, die sich nach den verschiedenen Methoden ergeben, verglichen); 19. Polarkoordinaten (Darstellung der Eigenfunktionen unter Zugrundelegung von Polarkoordinaten, desgl. der Transformationsformeln); 20. Kreisförmige Öffnung (Anwendung der abgeleiteten Formeln auf diesen Spezialfall und Diskussion der erhaltenen Ausdrücke); 21. Streuung an einem Schirm; 22. Formale Lösung der Integralgleichung; 23. Abgebeugte Felder; 24. Mathematischer Anhang (s. o.).

*Picht* (Babelsberg).

**Artmann, Kurt:** Beugung polarisierten Lichtes an Blenden endlicher Dicke im Gebiet der Schattengrenze. *Z. Phys.*, Berlin 127, 468—494 (1950).

Auf eine metallische Blende endlicher Dicke (im Schnitt durch ein Geradenpaar vom Abstand  $2a$  und durch einen Halbkreis vom Radius  $a$  begrenzt) fällt senkrecht eine ebene elektromagnetische Welle. Die Berechnung der gebeugten Welle für  $a \rightarrow 0$  (Beugung an der vollkommen leitenden Halbebene) hat Sommerfeld im Jahre 1896 gegeben. Für  $a \gg$  Lichtwellenlänge  $\lambda$  wird das Beugungsproblem auf das der Beugung am metallischen Kreiszyylinder zurückgeführt. Die dort auftretenden Reihenentwicklungen nach Hankel-Funktionen werden näherungsweise aufsummiert, indem die Summe über den Index durch ein Integral über den Index ersetzt wird. Es ergibt sich für  $a \gg \lambda$  eine Versetzung des Beugungsbildes gegenüber dem Beugungsbild hinter einer vollkommen schwarzen Blende desselben Profils um die Strecke  $c \cdot \lambda \cdot (a/\lambda)^{1/2}$ , wo  $c = 0,20$  bzw.  $c = -0,39$ , je nachdem der elektrische Vektor der einfallenden Welle senkrecht bzw. parallel zum Rand der Blende schwingt. Anschauliche Deutung der Ergebnisse und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen von Kappler [*Phys. Blätter* 3, 162 (1947)]. *J. Meixner* (Aachen).

**Papas, Charles H.:** Diffraction by a cylindrical obstacle. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 21, 318—325 (1950).

Verf. behandelt die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einem unendlich langen, vollkommen leitenden Zylinder nach der Variationsmethode von Levine und Schwinger. Der elektrische Vektor wird dabei parallel zur Zylinderachse angenommen, so daß ein rein zweidimensionales Problem vorliegt. Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt werden speziell für den Limes langer und kurzer Wellen berechnet. *W. Franz* (Münster).

**Wolter, Hans:** Zur Genauigkeitssteigerung optischer Messungen durch Minimumstrahlkennzeichnung. *Z. Naturforsch.* 5a, 139—143 (1950).

Verf. geht zunächst auf die prinzipielle Unschärfe eines Lichtstrahls ein, die bei einem Querschnitt  $\delta f = \delta x \cdot \delta y$  des als „Strahl“ bezeichneten engen Wellenbündels und einer Winkelstreuung  $\delta \omega = \delta \alpha_x \cdot \delta \alpha_y$  gegeben ist durch  $\delta x \delta \alpha_x \geq \lambda$ ;  $\delta y \delta \alpha_y \geq \lambda$  oder — mit  $\gamma = (\sin \alpha)/\lambda$  — durch  $\delta x \delta y \geq 1$ . Der Wert  $\delta x \delta y$  wird als quantitatives Maß der „Unschärfe“ benutzt, deren Reziprokes als „Schärfe“  $g$  bezeichnet wird. Verf. zeigt dann, daß sich die Unschärfegrenze 1 unterschreiten läßt, wenn auf die Energiekonzentration des Strahls verzichtet wird. Unter Benutzung einer Belegungsfunktion (innerhalb der Öffnung eines optischen Systems) wird eine „Richtcharakteristik“  $E(\gamma)$  definiert und festgestellt, wie die Belegungsfunktion beschaffen sein muß, mit der die Richtcharakteristik zur Strahlkennzeichnung besonders geeignet ist. Verf. geht dann auf die Möglichkeit der Maximumverschärfung (durch stärkere Senkung der Gesamtkurve in der Umgebung des betrachteten Maximums unter die 0-Linie) ein, die aber eine Verlängerung der Belichtungszeit erforderlich macht. Weiter behandelt er die Strahlenkennzeichnung durch ein Intensitätsminimum, bei der es auf die Doppelwertsbreite der Intensitätskurve ankommt, während es bei der Maximumstrahlkennzeichnung auf die Halbwertsbreite ankommt. Es wird näher auf diesen Fragenkomplex eingegangen. Auch der Einfluß der Kohärenz der Lichtquelle auf die Strahlkennzeichnung wird behandelt und darauf hingewiesen, daß die Minimumstrahlkennzeichnung mit Vorteil angewandt werden kann, wo kleine Ablenkungen des Lichts, Strahlversetzungen o. ä. gemessen werden sollen.

*Picht* (Babelsberg).



**Wolter, Hans:** Untersuchungen zur Strahlversetzung bei Totalreflexion des Lichtes mit der Methode der Minimumstrahlkennzeichnung. *Z. Naturforsch.* 5a, 143—153 (1950).

Die in der vorsteh. referierten Arbeit definierte Methode der Minimumstrahlkennzeichnung wendet Verf. auf die Untersuchung zur Strahlenversetzung bei der Totalreflexion des Lichts an. Es werden die allgemeinen Grundlagen der Theorie unter der Annahme entwickelt, daß die von zwei entfernten kohärenten, gegenphasigen Quellen ausgehenden elektromagnetischen Wellen mathematisch als Auflösung zweier ebener Wellen betrachtet werden, deren Fortpflanzungsrichtungen einen kleinen Winkel  $\Delta \ll 1$  einschließen. Sie werden an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit komplexen Brechungsindizes reflektiert. Die hierbei auftretende Strahlversetzung wird theoretisch abgeleitet. Anschließend wird mittels des Grenzüberganges  $\Delta \rightarrow 0$  eine Vereinfachung der Theorie durchgeführt. Es zeigt sich — entsprechend den Ergebnissen des Experiments — für senkrecht und parallel polarisiertes Licht eine verschiedene Strahlversetzung. Aus der Strahlversetzung ergibt sich eine gewisse „Eindringtiefe“ der Welle in das zweite Medium. Auch diese wird theoretisch näher betrachtet. Im einzelnen werden die Ergebnisse auf folgende Sonderfälle spezialisiert: 1. Beide Medien ohne Absorption; 2. Erstes Medium Luft, zweites Medium Seewasser; 3. Erstes Medium nicht leitend, zweites Medium Metall, z. B. Silber; 4. Erstes und zweites Medium durchsichtig,  $n_1 > n_2$ , Einfallswinkel größer als Grenzwinkel der Totalreflektion. Zur experimentellen Verifizierung wird eine Apparatur angegeben, die die von der Theorie vorausgesetzten Bedingungen realisiert. Die mit dieser Apparatur erhaltenen experimentellen Ergebnisse sind in der Arbeit reproduziert. Es wird sodann eine verbesserte Theorie durchgeführt, bei der die Voraussetzung  $\Delta \rightarrow 0$  fallengelassen wird. Die Ergebnisse der experimentellen Messungen werden mit denen der verbesserten Theorie verglichen. Weiter werden die Fehlerquellen der experimentellen Untersuchungen diskutiert und die Polarisationsabhängigkeit der Strahlversetzung auch nach der Maximummethode behandelt. *Picht.*

**Wolter, Hans:** Zur Frage des Lichtweges bei Totalreflexion. *Z. Naturforsch.* 5a, 276—283 (1950).

Unter Bezugnahme auf eine frühere eigene Arbeit (vorsteh. Referat) untersucht Verf. mit Hilfe der Minimumstrahlkennzeichnung den Weg, den das Licht bei der Totalreflexion im Innern des optisch dünneren Mediums durchläuft bzw. zurücklegt. Insbesondere geht er auf die Lage der Phasenflächen und auf die zeitgemittelte Energiestreuung ein, die er an Hand eines gezeichneten Schaubildes näher diskutiert. Hiernach erklärt er den Vorgang der Totalreflexion bzw. des im optisch-dünneren Medium erfolgenden Lichtvorganges dahin, daß an der einen Seite ein Teil der einfallenden Welle zum Aufbau der begleitenden inhomogenen Welle des dünneren Mediums benötigt und daher der auffallenden Welle entzogen wird, der er erst am anderen Rande des auffallenden Strahles wieder zugefügt wird [vgl. hierzu die analogen Überlegungen des Ref. in *Ann. Phys.*, V. F. 3, 433—496 (1929) und besonders *Phys. Z.* 30, 905—907 (1929)]. Verf. geht dann noch näher auf eine sogenannte zirkulierende Welle ein. Hierbei handelt es sich um Gebiete, in denen der zeitgemittelte Energiestrom in geschlossenen Stromlinien umläuft, wobei derartige zirkulierende Wellen bei der Totalreflexion solcher Wellen auftreten, die durch Intensitätsminima gekennzeichnet sind. Auch diese zirkulierenden Wellen werden an Hand gezeichneter Schaubilder näher diskutiert. *Picht (Potsdam).*

**Wolter, Hans:** Zur Abbildung zylindrischer Phasenobjekte elliptischen Querschnitts. *Ann. Phys.*, Leipzig, VI. F. 7, 147—156 (1950).

Verf. gibt unter teilweiser Bezugnahme auf eine frühere Arbeit [*Ann. Phys.*, VI. F. 7, 33 (1950)] die Formeln für die Abbildung von Phasenobjekten elliptischen und insbesondere kreisförmigen Querschnittes, die sich bei Benutzung des Phasenkontrastverfahrens bzw. des Dunkelfeld-, Hellfeld- und Schlierenverfahrens ergeben. Es diskutiert diese Formeln im Hinblick auf die objekttreue Abbildung und zeigt theoretisch (und für das Phasenkontrastverfahren auch experimentell), daß unter den in der Mikroskopie üblichen Bedingungen Strukturen und falsche Durchmesser der Objekte vorgetäuscht werden. Für die Deutung von Phasenkontrastbeobachtungen empfiehlt er einen Vergleich mit den aus den Formeln berechneten Kurven, die sich bei der Wahl verschiedener Durchmesser bzw. verschiedener Innenstrukturen ergeben. [Vgl. hierzu die früheren Arbeiten des Ref. in *Z. Instrumentenkunde* 56, 481—489 (1936); 58, 1—12 (1938).] *Picht (Potsdam).*

● **Francon, Maurice: Le contraste de phase en optique et en microscopie.** Paris: Éditions de la Revue d'optique théorique et instrumentale 1950. 109 p. et 6 plates, 480 francs.

**Martin, L. C.: The theory of the microscope — IV: The boundary-wave theory of image formation.** Proc. phys. Soc. London, Sect. B 62, 713—725 (1949).

Im Anschluß an Arbeiten von Young, Rubinowicz u. a. entwickelt Verf. die Theorie der Darstellung der Lichtverteilung durch Überlagerung der direkten Wellenbewegung durch Wellen, die von der beugenden Berandung der Öffnung ausgehen, und zwar speziell für den zweidimensionalen Fall. Die sich hierfür ergebenden Formeln werden angewandt, um die Bilderzeugung von kleinen Öffnungen und kleinen Gegenständen zu diskutieren. Insbesondere wird im Hinblick auf die Dunkelfeldmikroskopie das Bild einer geraden Linie im Dunkelfeld behandelt. Auch die Abbildung mittels des Phasenkontrastverfahrens bespricht Verf. unter Zugrundelegung der „Grenzwellenmethode“. Zum Schluß wird eine Reihe von photographischen Beugungsaufnahmen wiedergegeben, und zwar sowohl für Öffnungen im Hell- und Dunkelfeld und für Gegenstände im Hell- und Dunkelfeld, die erkennen lassen, daß die theoretisch gefundenen charakteristischen Eigenschaften sich experimentell bestätigen.

*Picht* (Babelsberg).

● **Abelès, Florin: Un théorème relatif à la réflexion métallique.** C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1942—1943 (1950).

Verf. zeigt, daß für die metallische Reflexion, für die Reflexion an Glasflächen und die totale Reflexion folgendes Theorem besteht: Für eine ebene, in oder senkrecht zur Einfallsebene linear polarisierte Welle, die auf die Trennungsfläche zweier homogener und isotroper, den ganzen Raum erfüllender Medien trifft und deren Reflexionskoeffizienten  $r_{\perp}$  bzw.  $r_{\parallel}$  sind, gilt, wenn das erste Medium durchsichtig, das zweite absorbierend oder durchsichtig ist, beide aber die gleiche magnetische Permeabilität besitzen, und wenn der einfallende Winkel im 1. Medium  $45^\circ$  beträgt, immer die Beziehung  $r_{\perp} = r_{\parallel}^2$ . In diesem Fall (Einfallswinkel =  $45^\circ$ ) ist also stets die durch die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert-reflektierte Welle transportierte Energie gleich dem Quadrat der durch die parallel polarisiert-reflektierte Welle transportierten Energie. Andererseits ist bei  $45^\circ$  Einfall der Phasensprung bei der senkrecht polarisierten Welle gleich dem doppelten Betrage des Phasensprungs bei der parallel polarisiert-reflektierten Welle. Dieses Theorem benutzt Verf., um in den berechneten Tafeln von Savornin [Ann. Phys., Paris 11, 129—255 (1939): dies. Zbl. 20, 410] und von Scandone (Nuovo Cimento 1946) festzustellen, ob jene Tafeln richtig berechnet sind. Er findet, daß die Savorninschen Tafeln für Stahl, Kupfer und Gold richtig zu sein scheinen, dagegen die für Silber falsch sind. Die von Scandone können gleichfalls nicht stimmen, da bei ihnen das Theorem nicht erfüllt ist.

*Picht* (Potsdam).

**Fragstein, C. v.: Berichtigung zur Abhandlung „Energieübergang an der Grenze zweier absorbierender Medien mit einer Anwendung auf die Wärmestrahlung in absorbierenden Körpern“.** Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 7, 63—72 (1950).

**Maravall, Dario: Der Energiefluß und die Dispersion im Medium.** Gac. mat., Madrid, I. Ser. 1, 60—64 (1949) [Spanisch].

**Hesse, M. B.: The calculation of magnetic lens fields by relaxation methods.** Proc. phys. Soc. London, Sect. B 63, 386—401 (1950).

Das Feld und die Linsenkonstanten werden für zwei typische Magnetlinsen, wie sie bei Elektronenmikroskopen Verwendung finden, mit Hilfe der von Southwell entwickelten Relaxationsmethode zur Lösung von Potentialproblemen berechnet. Die Resultate werden mit denen verglichen, die auf einfachen analytischen Annäherungen der Feldverteilung in den Arbeiten von Ref. und Ramberg beruhen und es wird gezeigt, daß sie hinsichtlich der charakteristischen Eigenschaften, auf welcher die Diskussion der Linsenleistung basiert, in enger Übereinstimmung sind. (Zusammenfassung des Verf.)

*W. Glaser* (Wien).



**Schlögl, Josef:** Zur Elektronenoptik magnetischer Linsen von Glaserschem Typus. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 237—262 (1949).

Die Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung von Brennpunktlage und Brennweite in magnetischen Abbildungsfeldern der Gestalt  $H(z) = H_0/[1 + (z/a)^2]^\mu$ . Die Elektronenbahnen  $y(z)$  sind mit den Substitutionen  $z = a \operatorname{ctg} \varphi$  und  $y = v(\varphi)/\sin \varphi$  durch die Differentialgleichung

$$v''(\varphi) + (1 + k^2 \sin^2 \varphi) v = 0; \quad m = 2(\mu - 1)$$

bestimmt. Die Lösungen dieser Differentialgleichung mit den Randbedingungen  $v(0) = 0$  und  $v(\pi) = C$  ( $\neq 0$ ), welche die optischen Konstanten bestimmen, werden mittels einer Integralgleichung, auf welche das Randwertproblem zurückgeführt wird, untersucht. Die Fourierentwicklung des Kernes wird nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen, und die so entstehende „ausgeartete“ Integralgleichung auf ein System linearer Gleichungen zurückgeführt, deren Koeffizientensystem explizit angegeben wird. Die umgekehrte Aufgabe der Bestimmung der Stärke des Magnetfeldes, d. h. des Parameters  $k^2$ , der einer bestimmten Brennpunktlage entspricht, wird nach der Methode von Ritz behandelt und die Genauigkeit an einem speziellen Beispiel geprüft.

W. Glaser (Wien).

**Melkich, Alexander:** Ausgezeichnete astigmatische Systeme der Elektronenoptik. I. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 155, 393—438 (1947).

Verf. betrachtet in dieser im Jahre 1944 an der Universität Berlin als Dissertation approbierten Arbeit elektronenoptische Systeme, für welche der Brechungsexponent zwei zueinander senkrechte Symmetrieebenen besitzt. Die entsprechenden Entwicklungen des elektrischen Potentials und des magnetischen Feldes werden angegeben. Der Verlauf der Äquipotentialflächen des skalaren magnetischen Potentials (Gestalt der Polschuhe) wird kurz diskutiert. Die anastigmatische Gaußsche Abbildung durch die achsennahen Elektronenbahnen wird behandelt und gezeigt, daß der achsiale Astigmatismus eines elektrischen Feldes durch ein Magnetfeld kompensiert werden kann. Schließlich werden die Bildfehler für ein derartiges astigmatisches System hergeleitet. In der Arbeit sind somit insbesondere bei Spezialisierung auf das rein elektrische Feld die Bildfehler von nicht-rotationssymmetrischen elektrischen Anordnungen enthalten, die man in letzter Zeit verschiedentlich zur Kompensation des Öffnungsfehlers elektrischer Linsen auszunutzen sucht.

W. Glaser (Wien).

**Melkich, Alexander:** Ausgezeichnete astigmatische Systeme der Elektronenoptik. II. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 155, 439—471 (1947).

Während für das abbildende elektrische Feld die Symmetrieeigenschaften des Brechungsexponenten mit den Symmetrieeigenschaften des elektrischen Feldes zusammenfallen, ist dies für den anisotropen Brechungsexponenten des magnetischen Feldes nicht der Fall. Verf. betrachtet daher in diesem zweiten Teil seiner Arbeit die elektronenoptischen Eigenschaften elektrisch-magnetischer Felder mit zwei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen der Abbildungsfelder, indem er die vom Ref. für derartige Systeme untersuchte Gaußsche Dioptrik für einen wichtigen Sonderfall auf die Bildfehler dritter Ordnung erweitert. Er bestimmt zunächst die Bedingungen dafür, daß die Kopplung der Elektronenbewegung in den beiden Symmetrieebenen beseitigt werden kann. Besonderes Interesse hat hier der Fall, daß das magnetische Feld längs der Achse kompensiert ist, also eine verdrehungsfreie Linse vorliegt und das elektrische Feld im Rahmen der Gaußschen Dioptrik rotationssymmetrisch ist. Für eine derartige kombinierte Feldanordnung werden die Bildfehler dritter Ordnung aufgestellt und die allgemeine Gestalt der Aberrationskurven diskutiert.

W. Glaser (Wien).

**Regenstreif, Édouard:** La lentille électrostatique indépendante en régime transgaussien. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1650—1652 (1950).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1262—1264



(1950)] werden für eine symmetrische elektrostatische Linse die Elektronenbahnen bis zur dritten Ordnung hergeleitet. Die beiden Fälle der Linsen- und Spiegelwirkung werden betrachtet.  
W. Glaser (Wien).

## Relativitätstheorie

●Costa de Beauregard, Olivier: *La théorie de la relativité restreinte* (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens). Paris: Masson 1949.

Dieses Lehrbuch der speziellen Relativitätstheorie stellt wirklich eine „moderne“ Fassung des Stoffes dar. Der in der allgemeinen Relativitätstheorie gebräuchliche Kalkül mit ko- und kontravariant geschriebenen Indizes wird von Anfang an benutzt. Besonders hervorzuheben ist die klare Darstellung auch der geläufigsten Teile. Seinen besonderen Wert erhält das Buch durch Aufnahme relativistischer Partikel- und Feldtheorien. Die Grundlagen vieler Dinge, die heute in der Physik der Theorie der Wellenfelder allgemein benutzt werden (Energie, Impuls, Drehimpuls, Spin), werden hier an klassisch verständlichen Beispielen zum ersten Male zusammenhängend dargestellt. Hierbei wird die relativistisch unschöne Integration über den Raum zu einer bestimmten Zeit (z. B. bei der Berechnung von Energie und Impuls aus dem Energie-Impuls-Tensor) durch die heute schon allgemein üblich gewordene Integration über beliebige raumartige Flächen ersetzt, eine Darstellungsweise, deren Bedeutung durch die Schwingerschen Arbeiten über Quantenelektrodynamik (dies. Zbl. 32, 94; Phys. Rev. 75, 651—679 (1949)] ins helle Licht gerückt wurde. — Der Inhalt des Büchleins umfaßt nach einer mathematischen und physikalischen Einleitung die relativistische Kinematik und Optik, also die üblichen Dinge wie Lorentzkontraktion und Zeitdilatation, Addition der Geschwindigkeiten usw., danach die Theorie des Elektromagnetismus, die Theorie der Dynamik der Flüssigkeiten und Teilchen mit und ohne Spin, die relativistische Thermodynamik.

G. Ludwig (Berlin).

Beek, Guido: *Relativistic variation of rest mass*. Nature, London 165, 200—201 (1950).

L'on montre, en partant de l'équation dynamique fondamentale d'un fluide électrisé, que la conservation de la masse propre n'a lieu que si la quadrivitesse dynamique est colinéaire à la quadridensité de courant. Exemple d'un cas plus général: interaction de deux dipôles magnétiques. Quelques remarques sur le cas général. Remarque: dans ce travail, on n'a pas considéré la généralisation de la dynamique relativiste tenant compte du spin, de Weyssenhof-Raabe et de l'A.

Costa de Beauregard (Paris).

Robertson, H. P.: *Postulate versus observation in the special theory of relativity*. Rev. modern Phys., New York 21, 378—382 (1949).

Etude destinée à réduire la part de l'hypothèse dans la fondation de la relativité restreinte, et faisant appel pour cela, à côté de l'expérience de Michelson-Morley, de celles de Kennedy-Thorndike et d'Ives-Stilwell. La première expérience prouvant l'isotropie de la valeur mesurée de la vitesse de la lumière dans tout repère galiléen, la seconde montre l'invariance de la grandeur de cette vitesse relativement à l'hypothétique vitesse absolue du repère. L'on aboutit ainsi à la forme originelle de la transformation de Lorentz, admettant un facteur  $g(v)$ . La prise en considération de la troisième expérience impose la conclusion  $g(v) = 1$  et la forme maintenant classique de la transformation de Lorentz.

Costa de Beauregard (Paris).

Fokker, A. D.: *On the space-time geometry of a moving rigid body*. Rev. modern Phys., New York 21, 406—408 (1949).

Ein einfaches Argument für das Herglotzsche Theorem wird gegeben, nach dem ein starrer Körper (im Sinne der speziellen Relativitätstheorie) nur 3 Freiheitsgrade hat.

W. Macke (Göttingen).

Kowalewski, Gérard: *Képler et les formules de Lorentz*. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 762—763 (1948).

Aus den Beziehungen zwischen exzentrischer und wahrer Anomalie in der Keplerbewegung werden durch Einführung homogener Koordinaten und dadurch, daß für die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = v/c$  gesetzt wird, die Lorentzschen Transformationsformeln gewonnen. *Fricke* (Hamburg).

Majorana, Q.: *Teoria speciale della relatività e teoria balistica della luce*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 3, 435—442 (1947).

Synge, J. L.: *The gravitational field of a particle*. Proc. Irish Acad. A 53, 83—114 (1950).

Das bekannte Schwarzschildsche Linienelement

$$ds^2 = e^{-\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^{\lambda} dt^2$$

mit  $\lambda = \log(1 - a/r)$ ;  $a = \text{const.} > 0$ , wird fast in der gesamten Literatur über die Allgem. Rel. Theorie als singular bei  $r = a$  angesehen. Vorliegende Arbeit zeigt, daß die Singularität sich durch geeignete Koordinatenwahl beheben läßt. Die zeitartigen geodätischen (Partikelbahnen) und die geodätischen Nulllinien (Lichtstrahlen) werden ausführlich diskutiert mit dem Resultat, daß eine Partikel die Stelle  $r = a$  sehr wohl durchlaufen kann und in endlicher Eigenzeit mit Lichtgeschwindigkeit bei  $r = 0$  ankommt. Die Arbeit ist voll interessanter und ausführlich diskutierter Einzelheiten. *Heckmann* (Hamburg).

Infeld, L. and A. Schild: *On the motion of test particles in general relativity*. Rev. modern Phys., New York 21, 408—413 (1949).

Es wird gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen eines Versuchsteilchens sich unmittelbar aus den Feldgleichungen der Gravitation ableiten lassen ohne die sonst übliche und auf die Mechanik zurückgehende Forderung der Bewegung auf geodätischen Linien. *W. Macke* (Göttingen).

Bullard, E. C. and R. I. B. Cooper: *The determination of the masses necessary to produce a given gravitational field*. Proc. R. Soc., London, A 194, 332—347 (1948).

Finzi, Bruno: *Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 18—25 (1949).

L'A. donne un nouvel exposé de la recherche des variétés caractéristiques du système des équations gravitationnelles d'Einstein. Cet exposé qui perfectionne celui de Levi-Civita [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. 11, 3—11, 113—121 (1930)] ne diffère pas en substance de celui de G. Darmon [Mém. Sci. math., Nr. 25, 19 (1927)]. Des exposés du rapporteur [Actual. sci. industr. Nr. 833, 15—19 (1939); Ann. sci. Ecole norm. sup., III. S. 60, 261—275 (1943)], où les équations relativistes gravitationnelles et électromagnétiques sont simultanément traités, conduisent à des résultats sensiblement identiques. *Lichnerowicz*.

Buchdahl, H. A.: *On Eddington's higher order equations of the gravitational field*. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 89—94 (1948).

Ist  $R_{\alpha\mu\nu\beta}$  der Riemannsche Krümmungstensor der vierdimensionalen Welt, so betrachtet Verf. neben der Invarianten  $G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$  (wo  $G_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha}$ ) die weiteren  $K' = G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ ;  $K'' = R_{\alpha\mu\nu\beta} R^{\alpha\mu\nu\beta}$  und  $K''' = G^2$ . Alle drei sind in den zweiten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  quadratisch. Bezeichnet man Variationsableitungen mit  $D/Dg^{\mu\nu}$ , so wird u. a. gezeigt, daß jede Lösung von  $DK/Dg^{\mu\nu} = 0$ , wo  $K = G - 2\lambda$  und  $\lambda$  die kosmologische Konstante ist, auch Lösung von  $DK'/Dg^{\mu\nu} = 0$  und  $DK''/Dg^{\mu\nu} = 0$  ist. Dagegen sind im allgemeinen die Lösungen von  $DK/Dg^{\mu\nu} = 0$  nur dann Lösungen von  $DK''/Dg^{\mu\nu} = 0$ , wenn sie von konstanter vierdimensionaler Krümmung sind. *Heckmann* (Hamburg).

Udeschini, Paolo: *Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 216—221 (1949).

L'A. remarque que le tenseur énergétique n'a pas de signification physique directe, que seule sa divergence qui donne l'action pondéromotrice en a une véritable, et que, par suite, en toute rigueur, le tenseur énergétique ne devrait être défini qu'à un tenseur symétrique additif près de divergence nulle (tenseur solénoïdal). L'intervention de ce tenseur ne se fait évidemment pas sentir dans les équations de la mécanique dérivant des principes de conservation, mais devrait entraîner une indétermination dans les équations d'Einstein qui déterminent la métrique intérieure de l'espace-temps. L'A. montre, à titre d'exemple, que l'on peut choisir dans le cas électromagnétique le tenseur solénoïdal de telle façon que sa composante purement temporelle soit proportionnelle à la densité de charge électrique. Ainsi la charge contribuerait directement à la courbure de la métrique d'univers. Les considérations précédentes ne paraissent pas convaincantes au rapporteur. *Lichnerowicz* (Paris).

**Klein, O.:** On the thermodynamical equilibrium of fluids in gravitational fields. *Rev. modern Phys.*, New York **21**, 531—533 (1949).

Tolman hat gezeigt, daß im thermodynamischen Gleichgewicht eine ruhende Flüssigkeit im statischen Gravitationsfeld die Bedingung  $T\sqrt{g_{44}} = \text{const.}$  erfüllt. Vorliegende Arbeit zeigt, daß daneben auch gilt  $\alpha\sqrt{g_{44}} = \text{const.}$ , wo  $\alpha$  das chemische Potential pro Einheitspartikel einschließlich der Ruhmasse ist, als Funktion der Raumkoordinaten betrachtet. *Heckmann* (Hamburg).

**Buchdahl, H. A.:** On Tolman's equation describing the thermal equilibrium in a gravitating sphere of fluid. *Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys.*, London, VII. S. **41**, 362—363 (1950).

Tolman hat [vgl. R. C. Tolman, *Relativity, thermodynamics and cosmology*, Oxford Univ. Press 1934, SS. 312—314; dies. Zbl. **9**, 413] sein Resultat, daß die Eigentemperatur  $T_0$  mit der 44-Komponente eines statischen  $g$ -Feldes verbunden sein müsse, durch

$$T_0 \sqrt{g_{44}} = \text{const.}$$

abgeleitet unter Zugrundelegung eines räumlich isotropen Linienelements, mußte aber weitere Zusatzannahmen machen. Vorliegende Arbeit zeigt, daß Tolmans Resultat ohne weitere Annahmen bei Zugrundelegung von

$$ds^2 = -e^2 dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) + e^r dt^2$$

folgt. Tolmans relativistische Thermodynamik wird vorausgesetzt. *Heckmann*.

**Curtis, A. R.:** The velocity of sound in general relativity, with a discussion of the problem of the fluid sphere with constant velocity of sound. *Proc. R. Soc., London*, A **200**, 248—261 (1950).

Untersucht wird die Ausbreitung des Schalls für eine spezielle Klasse von Metriken der allgemeinen Relativitätstheorie und dabei das Ergebnis erzielt, daß die Schallgeschwindigkeit für inkompressible Medien den Wert  $3^{1/2}c$  ( $c$  = Lichtgeschwindigkeit) hat. Die hieran angeschlossenen Untersuchungen der Flüssigkeitskugel mit konstanter Schallgeschwindigkeit, welche die inkompressible Flüssigkeit als Spezialfall enthalten, gehen aus von einer Schwarzschildschen kugelsymmetrischen Lösung (für konstante Energiedichte) der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Da eine Lösung in geschlossener Form nicht angegeben werden kann, ist eine Reihe von numerischen Ergebnissen für den inkompressiblen Fall tabellarisch zusammengestellt. *Fricke* (Hamburg).

**Willmore, T. J.:** Regraduation in spherically symmetric space-times of general relativity. *Phil. Mag., J. Sci. theor. exper. appl. Phys.*, VII. S. **40**, 428—434 (1949).

L'A. se propose d'étudier l'extension à la relativité générale de la théorie de la regraduation utilisée par la relativité cinématique. Une telle extension a été donnée par A. G. Walker [*Proc. R. Soc. Edinburgh* **62**, 164—174 (1946)] et l'A. étudie les conséquences de la regraduation de Walker sur un espace-temps à symétrie sphérique.



En particulier il montre que tout  $ds^2$  à symétrie sphérique admettant une regraduation du type  $\sigma = \sigma(t)$  est de la forme de Lemaître. Inversement il détermine la regraduation la plus générale admise par un modèle de Lemaître et par un modèle statique d'Einstein. Il met ainsi en évidence une classe intéressante de  $ds^2$  à symétrie sphérique équivalents au modèle de Lemaître. *Lichnerowicz* (Paris).

**Newing, R. A.:** A six-vector development of some results in kinematical relativity. *Quart. J. Math. (Oxford II. S.)* **1**, 153—160 (1950).

Es wird gezeigt, daß viele Resultate von Milnes kinematischer Kosmologie auf einfache Weise erhalten werden können durch systematische Verwendung antisymmetrischer Tensoren 2. Stufe („Sechservektoren“). *Heckmann* (Hamburg).

**Scherrer, W.:** Über die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen. *Comment. math. Helvetici* **24**, 46—63 (1950).

Verf. gibt der bekannten klassischen Dynamik inkohärenter, druckloser und nur ihrer eigenen Gravitation unterworfenen Materie einige eigene Wendungen und setzt sie in Beziehung zur sog. dynamischen Kosmologie. *Heckmann* (Hamburg).

**Armellini, Giuseppe:** L'espansione dell' Universo della meccanica classica. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 8, 15—20 (1950).

Darlegung der Hauptresultate der dynamischen Kosmologie ohne Bezug auf ältere Literatur, deren Allgemeinheit nicht erreicht wird. [Milne, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 5, 64—72 (1934); Milne und McCrea, ebenda 73—80; dies. *Zbl.* **9**, 42; Heckmann, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, N. F. **3**, 169—181 (1940); dies. *Zbl.* **23**, 284]. *Heckmann* (Hamburg).

**Watanabe, Satosi:** Wave equations in the de Sitter space. *Phys. Rev., Lancaster Pa.*, II. S. **76**, 296—297 (1949).

Verf. legt seiner Arbeit einen fünfdimensionalen krümmungsfreien durch  $r^2 = g_{ij}$ ,  $x^i x^j = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2 + (x^5)^2$  gegebenen Zeitraum zugrunde, in dem ein De Sitterscher Raum mit  $R$  als Weltradius eingebettet gedacht wird. Zwei Grundannahmen werden sodann gemacht: Jede Feldgröße  $u$  soll die Wellengleichung: (1)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x^i} = 0$  befriedigen und (2)  $\frac{\partial u}{\partial r} = i m u$ , wo  $c = 1 = \hbar$  und  $m$  eine zweckmäßige Konstante ist. Die Feldgleichungen, welche sich übrigens als eichinvariant zeigen, nehmen die Gestalt

$$[-x^k \pi_{jk} + i m R x_j] f^{ij} = 0,$$

an, wo  $\pi_{jk} = x_j \frac{\partial}{\partial x^k} - x_k \frac{\partial}{\partial x^j}$ . In kleinen Gebieten des Weltraumes, wo

$$x^5 \approx R, \quad |x^\mu| \ll R \quad (\mu = 1, 2, 3, 0),$$

sollen nun die elektromagnetischen Feldgleichungen einfach durch die Setzung:  $m = 0$ , aus den obigen hervorgehen. ( $u^1, u^2, u^3, u^0$ ) sind dabei die elektromagnetischen Potentiale, dagegen entsprechen  $u^5, f^{5\mu}$  dem materiefreien Meson mit dem Potential  $f^{5\mu}/im$ . Mit Hilfe der Diracmatrizen wird endlich die Linearisierung der Feldgleichungen hergestellt, und in dem erwähnten kleinen Gebiete erweisen sich dann die vier geläufigen Wellengleichungen als gültig. *S. C. Kar* (Calcutta).

**Scherrer, W.:** Gravitationstheorie und Elektrodynamik. *Helvetica phys. Acta* **22**, 89—100 (1949).

In Hilbertscher Fassung lautet das Miesche Wirkungsprinzip

$$0 = \delta \int [R + \kappa M] \sqrt{-g} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3;$$

der materielle Anteil  $M$  der Wirkungsfunktion hängt dabei von den elektromagnetischen Potentialen  $\varphi_\lambda$ , den Feldstärken  $F_{\lambda\mu}$  und außerdem von den Komponenten  $g_{\lambda\mu}$  der Metrik ab, nicht aber von deren Ableitungen. Die Bestandteile von  $M$  sollen also aus  $\varphi_\lambda, F_{\lambda\mu}, g_{\lambda\mu}$  gebildete Invarianten sein. In der bisherigen Ausführung der Theorie werden vier solche Invarianten benutzt, unter denen aber, wie Verf. zeigt, eine Identität besteht. Das ist eben nach Verf. der Fehler. Bei der neuen

vom Verf. vorgeschlagenen Variante werden als Basen  $F_1 = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda}$ ,  $F_2 = \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F^{\alpha\mu} F_{\mu\beta} F^{\beta\lambda}$  gewählt. Das entspricht auch der Anschauung von Mie, daß in der Wirkungskfunktion die Potentiale nicht explizite vorkommen sollen. Verf. setzt also  $M = F_1 + \varepsilon F_2$ , wo  $\varepsilon$  eine kleine Konstante ist, und wendet sich sodann dem statischen zentralsymmetrischen Fall zu, mit dem Linienelement bzw. den Potentialen

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - g^2 dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad \varphi_0 = \varphi(r), \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.$$

Hierauf findet er (1)  $\varphi'^2 + 2\varepsilon\varphi'^3 = A/r^2$

$$(2) \quad \kappa/4 \int_0^\infty (\varphi'^2 + 3\varepsilon\varphi'^4) r^2 dr = m \quad (\text{Gravitationsradius der Masse } \mu)$$

$$(3) \quad 2\pi \int_0^\infty (\varphi'^2 + 3\varepsilon\varphi'^4) r^2 dr = E \quad (\text{Selbstenergie}) = 8\pi K/3 \cdot A^{3/2}/(2\varepsilon)^{1/4}$$

mit  $K = 2 \cdot 18541$ . Mit dem Ansatz:  $A = e$  (Ladung des Elektrons) wird nun die kleine willkürliche Konstante  $\varepsilon$  ausgewertet; es zeigt sich dann, daß 98% der gesamten Energie innerhalb einer Kugel vom Radius  $8 \cdot 10^{-11}$  cm zu liegen kommt. Im ganzen ist die Arbeit recht beachtenswert.

S. C. Kar (Calcutta).

**Tonnelat, Marie-Antoinette:** Résolution des équations fondamentales d'une théorie unitaire purement affine. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 182—184 (1950).

L'A. se propose de résoudre complètement, dans la cas purement affine, les équations de sa théorie unitaire (ce Zbl. **33**, 92)  $\nabla'_\gamma r^\alpha_\beta = 0$  où les inconnues sont les coefficients  $A^e_{\mu\nu}$  de la connexion affine dissymétrique fondamentale et où la dérivation covariante auxiliaire  $\nabla'_\gamma$  est liée d'une manière simple à la dérivation  $\nabla_\gamma$  de la connexion fondamentale. On notera que ces équations ne diffèrent pas formellement de celles d'Einstein-Schrödinger. L'A. donne le principe de cette résolution et quelques formules explicites. Elle indique la complication relative de la solution et les difficultés de l'interprétation physique des tenseurs de courbure associés.

Lichnerowicz (Paris).

**Gião, Antonio:** The equations of Codazzi and the relations between electromagnetism and gravitation. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 764—768 (1949).

Ein Riemannscher  $R_N$  läßt sich in eine euklidischen  $E_{N+1}$  einbetten, wenn der Riemannstensor des  $R_N$  sich darstellen läßt in der Form  $R_{ijkl} = \omega_{ik} \omega_{jl} - \omega_{il} \omega_{jk}$ , wo  $\omega_{ik}$  die Komponenten der 2. Fundamentalform sind und den Codazzischen Gleichungen  $\omega_{ik,j} - \omega_{ij,k} = 0$  genügen. Ein solcher Raum heißt von der Klasse Eins und es wird angenommen, daß die Welt ein  $R_4$  der Klasse Eins sei. Dann wird mit Hilfe der  $\omega_{ik}$  ein elektromagnetischer Feldtensor definiert, der nicht antisymmetrisch ist und nur bei räumlichen Koordinatenänderungen und bei statischer Metrik in das Maxwell'sche Feld ausartet. Die neuen Feldgrößen liefern 1. ein elektrostatisches Feld jeder ruhenden und 2. ein magnetisches Feld jeder rotierenden Masse.

Heckmann (Hamburg).

**Gião, Antonio:** Sur l'angle des axes magnétique et de rotation des astres. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1203—1204 (1949).

L'A. étudie, dans le cadre de sa théorie du magnétisme des astres en rotation, les variations, d'un astre à l'autre, de l'angle  $\theta$  de l'axe magnétique avec l'axe de rotation. Il est reconnu que si  $2A_k^i = g^{il} \omega_{lk}$ , où  $g_{ik}$  et  $\omega_{ik}$  sont les tenseurs des métriques interne et externe, l'angle  $\theta$  est essentiellement dû à l'influence des composantes  $A_k^i$  non diagonales. Un calcul simple fournit une expression approchée intéressante de cet angle et montre en particulier que  $\theta$  (Terre) est supérieur à  $\theta$  (Soleil), en accord avec les faits d'observation.

Lichnerowicz (Paris).



## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Bilimović, Anton:** Der Pfaffsche Ausdruck und die vektoriellen Differentialgleichungen der Planetenstörungen. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 83—114 und russische Zusammenfassg. 115 (1948) [Serbisch].

In einer Reihe von Arbeiten über Fragen der Mechanik und Optik hat Verf. die Bedeutung einer Methode gezeigt, die er Pfaffsche Methode genannt hat. In dieser Arbeit wird die Pfaffsche Methode angewendet, um die vektoriellen Gleichungen des Verf. für die Planetenstörungen unmittelbar zu erhalten. Diese Differentialgleichungen stellen den Zusammenhang zwischen zwei beliebigen unabhängigen, konstanten Vektoren des Zweikörperproblems und den partiellen Gradienten der Störungsfunktion längs dieser Vektoren her. Sie geben eine konkrete Darstellung der Änderung der rein vektoriellen Planetenelemente und eröffnen damit einen neuen, rein geometrischen Weg für die Untersuchung der Planetenstörungen. — Da der Apparat der Pfaffschen Methode wenig bekannt ist, werden die unentbehrlichen Grundzüge dieser Methode wiedergegeben. Ebenso werden diejenigen Formeln der Planetenbewegung angegeben, die mit den Vektordifferentialgleichungen der Planetenstörungen zusammenhängen. (Aus der russischen Zusammenfassung.)

**Kurth, Rudolf:** Zur Dynamik instationärer Sternsysteme. Z. Astrophys. 26, 168—175 (1949).

In einem Sternsystem mit ellipsoidischer, zeitabhängiger Geschwindigkeitsverteilung muß auf Grund der Poissonschen Gleichung die Dichte homogen sein. Es wird gezeigt, daß solche Systeme nicht endlich sein können, da sonst die Dichte null sein müßte. Fricke (Hamburg).

**Chandrasekhar, S.:** Brownian motion, dynamical friction, and stellar dynamics. Rev. modern Phys., New York 21, 383—388 (1949).

Die Theorie der Brownschen Bewegung, wie sie von Einstein und Smoluchowski entwickelt worden ist, wird auf die Dynamik von Sternsystemen angewendet. Es wird gezeigt, wie die Wechselwirkungskraft, die auf einen Stern auf Grund der Vorübergänge an anderen wirkt, in ein Reibungsglied („dynamische Reibung“) und in ein Fluktuationsglied, das unabhängig von der Sterngeschwindigkeit ist, aufgelöst werden kann. Der Reibungskoeffizient kann aus den Elementarprozessen der Sternpassagen ermittelt werden. Fricke (Hamburg).

**Stumpff, K.:** Himmelsmechanik. Naturforsch. Med. in Deutschland 1939—1946 20, 43—74 (1948).

**Becker, W. und W. Fricke:** Bau des Sternsystems. Naturforsch. Med. in Deutschland 1939—1946, 20, 357—392 (1948).

**Heckmann, O.:** Statistische Dynamik von Sternsystemen. Naturforsch. Med. in Deutschland 1939—1946, 20, 393—411 (1948).

**Feynman, R. P., N. Metropolis und E. Teller:** Equations of state of elements based on the generalized Fermi-Thomas theory. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1561—1573 (1949).

Aus der Fermi-Thomasschen Theorie werden Zustandsgleichungen der Materie für hohe Drucke und sowohl niedrige als auch hohe Temperaturen abgeleitet. Die Berechnungen werden durchgeführt unter Vernachlässigung und unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen. Ferner sind Lösungen für verschiedene Kernladungszahlen  $Z$  (6 und 92) angegeben, um genauere Interpolation zu ermöglichen. Die Untersuchung einer Ähnlichkeitstransformation führt auf den hier zur Anwendung kommenden Virialsatz und die Beziehungen zwischen den Lösungen für verschiedene Werte von  $Z$ . Fricke (Hamburg).

**Ravenhall, D. G.:** Notes on the pulsations of stars. Monthly Not. astron. Soc., London 109, 705—710 (1949).

Die Amplitude des vierten harmonischen Schwingungsmodus (drei Knoten)



eines Cowlingschen Sternmodells wurde durch numerische Integration bestimmt. Es zeigte sich, daß dieser Schwingungsmodus stabiler ist als die Fundamentalschwingung. Die benutzte Methode gestattet auch, angenäherte Formeln für die Amplitude irgendeines Schwingungsmodus anzugeben. *H. Vogt (Heidelberg).*

**Prasad, Chandrika:** Anharmonic pulsations of the standard model: commensurable periods. *Monthly Not. astron. Soc., London* **109**, 711—719 (1949).

Es werden die Gleichungen anharmonischer Pulsationen für  $\alpha = 3 - 4/\gamma = 0,4$  gegeben ( $\gamma$  bedeutet effektives Verhältnis der spezifischen Wärmen) und unter Benutzung von Fourier-Reihen gelöst. Auch wird eine Methode entwickelt, um der periodischen Lösung benachbarte nichtperiodische Lösungen zu erhalten, und die Bedeutung dieser Lösungen wird an Hand der Beobachtung diskutiert. *H. Vogt.*

**Hoyle, F. and R. A. Lyttleton:** The structure of stars of non-uniform composition. *Monthly Not. astron. Soc., London* **109**, 614—630 (1949).

Es wird gezeigt, daß man bei Annahme ungleichförmiger chemischer Zusammensetzung der Sternmaterie auf Grund der Standardtheorie Sternmodelle erhalten kann, deren Durchmesser gleich denen der ausgedehntesten roten Riesensterne sind. Außerdem werden die physikalischen Ursachen untersucht, von denen es abhängt, ob sich in einem Stern eine gleichförmige oder eine ungleichförmige chemische Zusammensetzung herausbildet. Dabei wird auch die Bedeutung der zwei verschiedenen im Kosmos vorkommenden „Sternpopulationen“ diskutiert. *H. Vogt.*

**Biermann, L. und P. Wellmann:** Physik der Sternatmosphären. *Naturforsch. Med. in Deutschland* 1939—1947, **20**, 119—159 (1948).

**Biermann, L.:** Der innere Aufbau der Sterne. *Naturforsch. Med. in Deutschland* 1939—1946, **20**, 161—179 (1948).

**Dingle, Herbert:** Modern theories of the origin of the universe. *Advanc. Sci., London* **7**, 3—12 (1950).

Wurde als Norman Lockyer-Lecture im November 1949 in Birmingham vorgetragen. Es wird darin ein Überblick gegeben über die wichtigsten neueren kosmogonischen Theorien bei besonderer Würdigung der kosmogonischen Untersuchungen Lockyers. Zuletzt wird etwas näher auf die große Frage nach dem Ursprung und der Entwicklung der Welt als Ganzes eingegangen, und das Ergebnis, zu dem Verf. kommt, ist: „The philosopher or theologian who builds his system on the models of the universe that we now construct is building on a foundation of sand“. *Vogt.*

**Gião, Antonio:** La distribution des galaxies et la structure cosmologique de l'espace-temps. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 981—982 (1949).

L'A. déduit de l'expression précédemment donnée (ce Zbl. **35**, 268) de la constante cosmologique gravitationnelle  $\lambda$  certaines conséquences cosmologiques. On a, notamment, pour le nombre  $N$  de galaxies que l'on peut observer dans un volume  $V$   $N = (6\chi^2 - \lambda) V C^2 / 8\pi K M$  où  $M$  est la masse moyenne des galaxies,  $\chi$  la courbure moyenne de l'espace-temps,  $K$  la constante newtonienne de la gravitation. L'espace-temps à échelle cosmologique apparaît comme un espace de De Sitter, déformé naturellement le long des tubes d'univers des galaxies. *Lichnerowicz (Paris).*

**Haar, D. ter:** Cosmogonical problems and stellar energy. *Rev. modern Phys., New York* **22**, 119—152 (1950).

**Popov, Kiril A.:** Über die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S.* **69**, 755—758 (1949) [Russisch].

Soient  $0xyz$  et  $0\xi\eta\zeta$  deux repères admettant pour origine le centre de la terre  $T$ ;  $0xyz$  est disposé suivant le plan de l'écliptique à l'époque  $t_0$  et les directions des axes  $0xyz$  sont fixes;  $0\xi\eta\zeta$  est lié à  $T$  et  $0\xi\eta$  se confond avec l'équateur de  $T$ ;  $\theta$  et  $\psi$  sont les angles de nutation et de précession de  $0\xi\eta\zeta$  par rapport à  $0xyz$ . — Poisson a formé le système différentiel de 1<sup>er</sup> ordre en  $\theta$  et  $\psi$ , en tenant compte de la seule attraction solaire sur  $T$ . L'A. ramène ce système, irréductible aux quadratures, à un système d'équations intégrales de Volterra, dont les solutions se dévelop-



pent suivant des séries très rapidement convergentes. Une méthode analogue vaut aussi pour étudier l'influence du mouvement de la lune sur  $\theta$  et  $\varphi$ . *Kravtchenko*.

**Scholte, J. G.: The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves.** Monthly Not. astron. Soc., Geophysic. Suppl., London 5, 120—126 (1947).

**Prey, Adalbert: Über die Theorie der Landbrücken und die Viskosität der Erde.** Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 593—624 (1948).

Zur Beurteilung der Landbrückentheorie wird, als Modell, mit Hilfe einer Kugelfunktionsentwicklung das Einsinken eines kreisförmigen Kontinentes berechnet mit 2000 km Radius, einer Dicke von 30 bzw. 50 km und einer Dichte von  $2,7 \text{ gr/cm}^3$  in das darunterliegende Sima mit der Dichte  $3,0 \text{ gr/cm}^3$ . Die Schnelligkeit des Einsinkens als Funktion der Zähigkeit des Simas wird gegeben. *W. Kertz*.

**Davies, T. V.: Rotatory flow on the surface of the earth. I.: Cyclostrophic motion.** Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII, S. 39, 482—491 (1948).

**Barber, N. F. and F. Ursell: The generation and propagation of ocean waves and swell. I.: Wave periods and velocities.** Phil. Trans. R. Soc. London A 240, 527—560 (1948).

**Goldsbrough, G. R.: The tides in oceans on a rotating globe. V.** Proc. R. Soc., London, A 200, 191—200 (1950).

Es wird eine Methode zur Berechnung der Gezeiten eines von zwei Meridianen begrenzten Ozeans auf einer rotierenden Kugel angegeben. Die darin enthaltene Randwertaufgabe wird nach der Galerkinschen Methode gelöst durch eine Doppelreihenentwicklung nach einem System von Orthogonalfunktionen, die einzeln den Randbedingungen genügen. Im Gegensatz zu früheren numerischen Arbeiten kann so die Lösung formelmäßig explizit angegeben werden. Für die  $K_2$ -Halbtagsgezeit und das Tiefengesetz  $h = h_0 \sin^2 \theta$  ( $\theta$  = Poldistanz) werden die Entwicklungskoeffizienten ausgerechnet und Resonanztiefen angegeben. [Part IV: Proc. R. Soc., London A 140, 241—253 (1933); dies. Zbl. 6, 383]. *W. Kertz* (Göttingen).

**Gledhill, J. A. and M. E. Szendrei: Theory of the production of an ionized layer in a non-isothermal atmosphere neglecting the earth's curvature, and its application to experimental results.** Proc. phys. Soc. London, Sect. B 63, 427—445 (1950).

Die Chapmansche Theorie der Schichtbildung in der Ionosphäre, die eine isotherme Atmosphäre voraussetzt, wird erweitert auf den Fall einer linearen Abhängigkeit

$$T = T_0 + \gamma(h - h_0)$$

der Temperatur von der Höhe. Auch unter dieser Annahme lassen sich alle Rechnungen, die genau wie bei Chapman verlaufen, elementar bis zu expliziten Endresultaten durchführen. Mit den üblichen einfachen Ansätzen  $dJ = \beta N J \sec \chi dh$  ( $\beta$  = atomarer Absorptionskoeffizient,  $N(h)$  = Gasteilchendichte) für die Abnahme der Intensität  $J$  der ionisierenden Strahlung von der Zenithdistanz  $\chi$  der Sonne und  $dn/dt = q - \alpha n^2$  für den Zusammenhang zwischen der Ionisierungsstärke  $q$  und der Elektronenkonzentration  $n$  ergeben sich die folgenden Formeln, wenn  $dn/dt = 0$  gesetzt werden, der Zustand also stets als Gleichgewichtszustand angesehen werden darf:

$$n^2 = B \left( 1 + \gamma \frac{h - h_0}{T_0} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{F} \left( 1 + \gamma \frac{h - h_0}{T_0} \right)^{-C/\gamma} \right\},$$

$$n_{\max}^2 = B F (1 + \gamma/C)^{(1+\gamma/C)} \exp \{ -(1 + \gamma/C) \}, \quad h_{\max} = h_0 + \frac{T_0}{\gamma} [ \{ F (1 + \gamma/C) \}^{-\gamma/C} - 1 ].$$

Dabei sind als Abkürzungen eingeführt

$$B = \beta N_0 J_{\infty} / \alpha w \quad (w = \text{Ionisierungsenergie}), \quad F = C \cos \chi / N_0 \beta T_0;$$

$$C = m g / k \quad (k = \text{Boltzmann-Konstante}, m = \text{mittleres Molekulargewicht des Gases}).$$

Mathematisch von Interesse ist nur die Auswertung dieser Relationen bis zu einem Vergleich mit den Ergebnissen von Messungen, die von den Verf. durchgeführt worden sind, und bis zu einer Bestimmung der in den Formeln vorkommenden Parameter. Sie wird geleistet durch ein hübsches graphisches Verfahren. Hier muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, ebenso wie bezüglich der abschließenden physikalischen Diskussion der Sachlage über die Bündigkeit der quantitativen Folgerungen.

*R. Szeliger* (Greifswald).